Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих
в СПбГУ на программы основного общего образования и среднего общего образования
для обучения в Академической гимназии им. Д.К. Фаддеева СПбГУ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2019

АННОТАЦИЯ

В методических указаниях приводится программа вступительных испытаний по математике в СПбГУ на программы основного общего образования и среднего общего образования для обучения в Академической гимназии им. Д.К.Фаддеева СПбГУ. Подробно описана структура экзаменационных заданий 2018 года, приведены варианты с подробными решениями задач. Прилагаются тренировочные задачи для самостоятельного решения.

Составители:
Балашова Мария Олеговна
Голикова Екатерина Сергеевна
Головачев Григорий Михайлович

СОДЕРЖАНИЕ

1. Программа вступительных испытаний по математике в СПбГУ на программы основного общего образования и среднего общего образования

Программа вступительных испытаний по математике составлена на основе обязательного минимума содержания основных образовательных программ и требований к уровню подготовки выпускников основной школы (Приказ Минобразования РФ «Об утверждении федерального компонента Государственных стандартов начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования от 05.03.2004 г. N1089 в редакции 07.06.2017).

1.1. Программа вступительных испытаний в 8 класс

1. Арифметика

1.1 Натуральные числа

1.1.1 Десятичная система счисления. Римская нумерация.

1.1.2 Арифметические действия над натуральными числами. Свойства арифметических действий.

1.1.3 Степень с натуральным показателем, вычисление значений выражений, содержащих степени.

1.1.4 Делимость натуральных чисел. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10.

1.1.5 Простые и составные числа. Разложение натурального числа на простые множители.

1.1.6 Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.

1.1.7 Деление с остатком.

1.2 Дроби

1.2.1 Обыкновенные дроби.

1.2.2 Основное свойство дроби. Сокращение дробей.

1.2.3 Арифметические действия с обыкновенными дробями.

1.2.4 Сравнение дробей.

1.2.5 Нахождение указанной части числа (дроби) по известной его части (дроби).

1.2.6 Десятичные дроби.

1.2.7 Сравнение десятичных дробей.

1.2.8 Арифметические действия с десятичными дробями.

1.2.9 Представление десятичной дроби в виде обыкновенной и обыкновенной дроби в виде десятичной.

1.3 Рациональные числа

1.3.1 Положительные и отрицательные числа, нуль.

1.3.2 Модуль числа, геометрический смысл модуля.

1.3.3 Сравнение рациональных чисел.

1.3.4 Арифметические действия с положительными и отрицательными числами. Свойства арифметических действий.

1.3.5 Степень с целым показателем.

1.3.6 Числовые выражения, порядок действий в них, использование скобок.

1.3.7. Решение текстовых задач арифметическими приемами.

1.4. Измерения, приближения, проценты

1.4.1 Единицы измерения длины, площади, объема, массы, времени, скорости. Размеры объектов и длительность процессов в окружающем мире.

1.4.2 Представление зависимости между величинами в виде формул.

1.4.3 Проценты. Нахождение процента от величины и величины по ее проценту.

1.4.4 Отношение, выражение отношения в процентах.

1.4.5 Пропорция. Основное свойство пропорции.

1.4.6 Пропорциональная и обратно пропорциональная зависимости.

1.4.7 Округление натуральных чисел и десятичных дробей.

1.4.8 Прикидка и оценка результатов вычислений.

2 Алгебра

2.1 Алгебраические выражения

2.1.1 Буквенные выражения. Числовое значение буквенного выражения. Допустимые значения переменных, входящих в алгебраические выражения.

2.1.2 Подстановка выражений вместо переменных

2.1.3 Равенство буквенных выражений. Тождество, доказательство тождеств.

2.1.4 Преобразования алгебраических выражений.

2.1.5 Свойства степеней с целым показателем, преобразование выражений, содержащих степени с целым показателем.

2.1.6 Многочлены. Многочлены с одной переменной. Степень многочлена. Корень многочлена.

2.1.7 Сложение, вычитание и умножение многочленов, формулы сокращенного умножения: квадрат суммы и квадрат разности, формула разности квадратов.

2.1.8 Разложение многочлена на множители.

2.1.9 Алгебраические дроби. Сокращение дробей.

2.1.10 Действия с алгебраическими дробями.

2.2 Уравнения и неравенства

2.2.1 Уравнение с одной переменной. Корень уравнения.

2.2.2 Линейное уравнение.

2.2.3 Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

2.2.4 Переход от словесной формулировки соотношений между величинами к алгебраической.

2.3 Числовые функции

2.3.1 Функция. Способы задания функций. Область определения и область значений функции.

2.3.2. График функции.

2.3.3 Функции, описывающие прямую и обратную пропорциональную зависимости.

2.3.4 Линейная функция, ее свойства и график, геометрический смысл коэффициентов.

2.4 Координаты

2.4.1. Декартовы координаты на плоскости; координаты точки.

2.4.2 Уравнение прямой, угловой коэффициент прямой, условие параллельности прямых.

3. Геометрия

3.1 Начальные понятия и теоремы геометрии

3.1.1 Геометрические фигуры и тела. Точка, прямая и плоскость.

3.1.2 Равенство в геометрии.

3.1.3 Понятие о геометрическом месте точек.

3.1.4 Расстояние. Отрезок, луч. Ломаная.

3.1.5 Угол. Прямой угол. Острые и тупые углы.

3.1.6 Вертикальные и смежные углы.

3.1.7 Биссектриса угла и ее свойства.

3.1.8 Параллельные и пересекающиеся прямые. Перпендикулярность прямых. Теоремы о параллельности и перпендикулярности прямых. Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Перпендикуляр и наклонная к прямой.

3.2 Треугольник

3.2.1 Прямоугольные, остроугольные и тупоугольные треугольники.

3.2.2 Высота, медиана, биссектриса, средняя линия треугольника.

3.2.3 Равнобедренные и равносторонние треугольники; свойства и признаки равнобедренного треугольника.

3.2.4 Признаки равенства треугольников. Признаки равенства прямоугольных треугольников.

3.2.5 Неравенство треугольника.

3.2.6 Сумма углов треугольника.

3.2.7 Внешние углы треугольника

3.2.8 Теорема Фалеса.

3.3 Измерение геометрических величин

3.3.1 Длина отрезка. Длина ломаной, периметр многоугольника.

3.3.2 Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми.

3.3.3. Величина угла. Градусная мера

3.3.4 Понятие о площади плоских фигур. Равносоставленные и равновеликие фигуры.

3.3.5 Площадь прямоугольника.

Основные умения, проверяемые заданиями вступительных испытаний

1.1 Выполнять устно арифметические действия: сложение и вычитание двузначных чисел и десятичных дробей с двумя знаками, умножение однозначных чисел, арифметические операции с обыкновенными дробями с однозначным знаменателем и числителем.

1.2 Переходить от одной формы записи чисел к другой, представлять десятичную дробь в виде обыкновенной и в простейших случаях обыкновенную в виде десятичной, проценты - в виде дроби и дробь - в виде процентов.

1.3 Решать текстовые задачи, включая задачи, связанные с отношением и с пропорциональностью величин, с дробями и процентами.

2. Уметь выполнять действия с числами.

2.1 Уметь выполнять арифметические действия с рациональными числами

2.2 Уметь выполнять действия с натуральными числами: деление с остатком, разложение на простые множители, поиск наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного, использование признаков делимости.

3. Уметь выполнять действия с функциями

3.1 Изображать числа точками на координатной прямой.

3.2 Находить значения функции, заданной формулой, таблицей, графиком, по ее аргументу.

4. Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами.

4.1 Распознавать геометрические фигуры, различать их взаимное расположение.

4.2 Изображать геометрические фигуры.

4.3 Распознавать на чертежах, моделях и в окружающей обстановке основные пространственные тела, изображать их.

4.4. Вычислять значения геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов), в том числе: для углов от 0 до 180°.

5. Уметь работать со статистической информацией, вычислять статистические характеристики, решать комбинаторные задачи.

5.1 Извлекать информацию из таблиц, диаграмм, графиков.

5.2 Решать комбинаторные задачи путем систематического перебора возможных вариантов, а также с использованием правила умножения.

6 Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни

6.1 Решать несложные практические расчетные задачи, в том числе, используя при необходимости справочные материалы, калькулятор; выполнять прикидку и оценку результата вычислений; интерпретировать результаты решения задач с учетом ограничений, связанных с реальными свойствами рассматриваемых процессов и явлений.

6.2 Пользоваться основными единицами длины, массы, времени, скорости, площади, объема; выражать более крупные единицы через более мелкие и наоборот.

6.3 Выполнять расчеты по формулам, составлять формулы, выражающие зависимость между реальными величинами; находить нужные формулы в справочных материалах;

описывать зависимость между физическими величинами соответствующими формулами при исследовании несложных практических ситуаций.

6.4 Интерпретировать графики реальных зависимостей между величинами.

6.5 Описывать реальные ситуации на языке геометрии; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин (используя при необходимости справочники и технические средства).

6.6 Выполнять построения с использованием геометрических инструментов (линейка, угольник, циркуль, транспортир).

6.7 Анализировать реальные числовые данные, представленные в виде диаграмм, графиков, таблиц; понимать статистические утверждения.

1.2. Программа вступительных испытаний в 9 класс

Включаются все разделы, отнесенные к 8 классу, а также следующие разделы

1 Арифметика

1.1 Действительные числа

1.1.1 Квадратный корень из числа. Нахождение приближенного значения корня с помощью калькулятора.

1.1.2. Понятие об иррациональном числе. Десятичные приближения иррациональных чисел.

2 Алгебра

2.1 Алгебраические выражения

2.1.1. Квадратный трехчлен. Теорема Виета. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.

2.1.2 Рациональные выражения и их преобразования.

2.1.3 Свойства квадратных корней и их применение в вычислениях.

2.2 Уравнения и неравенства

2.2.1 Квадратное уравнение: формула корней квадратного уравнения.

2.2.2 Решение рациональных уравнений.

2.2.3 Система уравнений; решение системы.

2.2.4 Система двух линейных уравнений с двумя переменными; решение подстановкой и алгебраическим сложением.

2.2.5 Неравенство с одной переменной. Решение неравенств.

2.2.6 Линейные неравенства с одной переменной и их системы.

2.2.7 Числовые неравенства и их свойства.

2.2.8 Решение текстовых задач алгебраическим способом.

2.3 Числовые функции

2.3.3 График функции, возрастание, убывание функции, нули функции, сохранение знака на промежутке, наибольшее и наименьшее значения. Чтение графиков функций.

2.3.2 Гипербола.

2.3.3 Квадратичная функция, ее свойства; парабола, ось симметрии параболы, координаты вершины параболы.

2.4 Координаты

2.4.1 Изображение чисел точками координатной прямой.

2.4.2 Числовые промежутки: интервал, отрезок, луч.

3 Геометрия

3.1 Треугольник

3.1.1 Зависимость между величинами сторон и углов треугольника.

3.1.2 Подобие треугольников; коэффициент подобия. Признаки подобия треугольников.

3.1.3 Теорема Пифагора.

3.1.4 Признаки равенства прямоугольных треугольников.

3.1.5 Замечательные точки треугольника: точки пересечения серединных перпендикуляров, биссектрис, медиан.

3.2 Четырехугольник

3.2.1 Параллелограмм, его свойства и признаки.

3.2.2 Прямоугольник, квадрат, ромб, их свойства и признаки.

3.2.3 Трапеция, средняя линия трапеции; равнобедренная трапеция.

Основные умения, проверяемые заданиями вступительных испытаний

l. Уметь выполнять действия с числами

1.1 Сравнивать рациональные и действительные числа; находить в несложных случаях значения степеней с целыми показателями и корней; находить значения числовых выражений.

1.2 Округлять целые числа и десятичные дроби, находить приближения чисел с недостатком и с избытком, выполнять оценку числовых выражений.

2. Уметь выполнять алгебраические преобразования

2.1.Выполнять арифметические действия с алгебраическими дробями.

2.2 Применять свойства арифметических квадратных корней для вычисления значений и преобразования числовых выражений, содержащих квадратные корни.

3 Уметь решать уравнения и неравенства

3.1 Решать линейные, квадратные уравнения и простейшие рациональные уравнения.

3.2 Решать линейные неравенства с одной переменной и их системы.

3.3 Решать текстовые задачи алгебраическим методом, интерпретировать полученный результат, проводить отбор решений, исходя из формулировки задачи.

4. Уметь выполнять действия с функциями

4.1 Определять координаты точки плоскости, строить точки с заданными координатами.

4.2 Определять свойства функции по ее графику.

4.3 Описывать свойства изученных функций, строить их графики.

5. Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами

5.1 Решать геометрические задачи, опираясь на изученные свойства фигур и отношений между ними, применяя дополнительные построения, идеи симметрии.

6. Уметь строить и исследовать простейшие математические модели

6.1 Моделировать практические ситуации и исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

6.2 Пользоваться языком геометрии для описания предметов окружающего мира.

6.3 Проводить доказательные рассуждения при решении задач, выстраивать аргументацию при доказательстве; распознавать логически некорректные рассуждения; записывать математические утверждения, доказательства.

1.3. Программа вступительных испытаний в 10 класс

Включаются все разделы, отнесенные к 8 и 9 классам, а также следующие разделы

1.Арифметика

Действительные числа

1.1. Корень третьей степени.

1.2.1 Действительные числа как бесконечные десятичные дроби.

1.2.2 Сравнение действительных чисел.

1.2 Измерения, приближения, проценты

1.2.1 Запись приближенных значений в виде $x = a \pm h$, переход к записи в виде двойного неравенства.

1.2.2 Запись чисел в стандартном виде.

2 Алгебра

2.1 Уравнения и неравенства

2.1.1 Примеры решения уравнений высших степеней; методы замены переменной, разложения на множители.

2.1.2 Уравнение с двумя переменными; решение уравнения с двумя переменными. Решение простейших уравнений с двумя переменными в целых числах.

2.1.3 Уравнение с несколькими переменными.

2.1.4 Примеры решения нелинейных систем.

2.1.5 Квадратные неравенства с одной переменной.

2.2 Числовые последовательности

2.2.1 Понятие последовательности.

2.2.2 Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формулы общего члена арифметической и геометрической прогрессий и суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессий.

2.2.3 Сложные проценты.

2.3 Числовые функции

2.3.1 Графики функций: корень квадратный, корень кубический, модуль.

2.3.2 Использование графиков функций для решения уравнений и систем.

2.3.3 Примеры графических зависимостей, отражающих реальные процессы.

2.4 Координаты

2.4.1 Геометрический смысл модуля числа.

2.4.2 Координаты середины отрезка. Формула расстояния между двумя точками плоскости.

2.4.3 Уравнение окружности с центром в начале координат и в произвольной точке.

2.4.4 Графическая интерпретация решения системы уравнений с двумя переменными.

3 Геометрия

3.1 Начальные понятия и теоремы геометрии

3.1.1 Наглядные представления о пространственных телах: кубе, параллелепипеде, призме, пирамиде, шаре, сфере, конусе, цилиндре. Примеры сечений. Примеры разверток.

3.2 Треугольник

3.2.1 Синус, косинус, тангенс, котангенс острого угла прямоугольного треугольника и углов от 0° до 180°; приведение к острому углу. Решение прямоугольных треугольников.

3.2.2 Основное тригонометрическое тождество. Формулы, связывающие синус, косинус, тангенс, котангенс одного и того же угла. Теорема косинусов и теорема синусов; примеры их применения для вычисления элементов треугольника.

3.3 Многоугольники

3.3.1 Выпуклые многоугольники.

3.3.2 Сумма углов выпуклого многоугольника.

3.3.3 Вписанные и описанные многоугольники.

3.3.4 Правильные многоугольники.

3.4 Окружность и круг

3.4.1 Центр, радиус, диаметр. Дуга, хорда. Сектор, сегмент.

3.4.2 Центральный, вписанный угол; величина вписанного угла.

3.4.3 Взаимное расположение прямой и окружности.

3.4.4 Касательная и секущая к окружности; равенство касательных, проведенных из одной точки.

3.4.5 Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника.

3.4.6 Вписанные и описанные окружности правильного многоугольника.

3.5 Измерение геометрических величин

3.5.1 Длина окружности, число n; длина дуги.

3.5.2 Величина угла. Градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности.

3.6 Измерение геометрических величин

3.6.1 Площадь параллелограмма, треугольника и трапеции (основные формулы). Формулы, выражающие площадь треугольника через две стороны и угол между ними.

3.6.2 Площадь круга и площадь сектора.

3.6.3 Связь между площадями подобных фигур.

3.6.4 Объем тела. Формулы объема прямоугольного параллелепипеда, куба, шара, цилиндра и конуса.

3.7 Векторы

3.7.1 Вектор. Длина (модуль) вектора. Координаты вектора. Равенство векторов.

3.7.2 Операции над векторами: умножение на число, сложение, разложение, скалярное произведение. Угол между векторами.

4. Элементы логики, комбинаторики, статистики и теории вероятностей

4.1 Множества и комбинаторика

4.1.1 Примеры решения комбинаторных задач: перебор вариантов, правило умножения.

Основные умения, проверяемые заданиями вступительных испытаний

l. Уметь выполнять действия с числами

1.1.Записывать большие и малые числа с использованием целых степеней числа десять.

2 Уметь решать уравнения и неравенства

2.1. Решать простейшие рациональные уравнения, сводящиеся к ним, системы двух линейных уравнений и несложные нелинейные системы.

2.2.Решать квадратные неравенства с одной переменной и их системы.

3. Уметь выполнять действия с функциями

3.1 Находить область определения и область значений функций доступными методами

3.2 Распознавать арифметические и геометрические прогрессии. Применять формулы общих членов, суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессий.

3.3 Определять значения тригонометрических функций по заданным значениям углов.

4. Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами

4.1 Решать геометрические задачи, опираясь на алгебраический и тригонометрический аппарат.

4.2 В простейших случаях строить сечения и развертки пространственных тел.

4.3 Проводить операции над векторами, вычислять длину и координаты вектора, угол между векторами.

2. Структура заданий вступительного испытания по математике в 2018 году

Вступительное испытание по математике в 2018 г. проведено в форме письменного экзамена. Продолжительность экзамена составила 3 астрономических часа. Все поступающие в классы одной параллели (в 8-й, в 9-й, 10-й классы) выполняли единые задания. Варианты в первом и во втором экзаменационных потоках имели совпадающую структуру, отличались конкретными задачами, но соответствующие задачи разных заданий имели одинаковые сложность и тематику. Для решения всех задач достаточно сведений, содержащихся в учебниках по математическим дисциплинам, включенных в Федеральный перечень учебников 2018 г.

Каждое экзаменационное задание состояло из 12 задач, разбитых на три группы. Каждая из задач с первой по четвертую оценивалась от 0 до 5 баллов. Каждая из задач с пятой по восьмую оценивалась от 0 до 8 баллов. Каждая из задач с девятой по двенадцатую оценивалась от 0 до 12 баллов.

Первая группа заданий направлена на проверку базовых знаний и умений, которыми должны владеть все обучающиеся. Задачи, входящие во вторую группу заданий, могут быть отнесены к задачам повышенной сложности основных образовательных программ. Для решения этих задач требуется уверенное владение традиционными, стандартными методами решения. В экзаменационных вариантах для поступающих в 9-й естественнонаучный класс задания третьей группы примерно соответствовали заданиям второй группы, немного превосходя их по сложности. В вариантах для поступающих в 8-й и в 10-й классы при выполнении заданий третьей группы требовалось владеть навыками самостоятельного поиска решений, уметь выдвигать новые предположения и проводить доказательства, видеть полное решение задачи, не ограниченное рассмотрением частных случаев.

Полное решение задачи из первой группы заданий оценивается 5-ю баллами. Решение, содержащее одну арифметическую ошибку или описку, оценивается в 3 балла. Неверное применение метода, неверная идея решения оценивается в 0 баллов. Полное решение задачи из второй группы заданий оценивается 8-ю баллами. Решение, содержащее одну арифметическую ошибку или описку, оценивается 6-7 баллов. Отсутствие в решении одного из возможных случаев снижает оценку до 4 баллов. Решение, содержащее верную идею, но не доведенное до ответа, или содержащее грубую арифметическую ошибку, оценивается в 2-3 балла. Неверное применение метода, неверная идея решения оценивается в 0 баллов. Полное решение задачи из третьей группы заданий оценивается 12-ю баллами. Решение, содержащее одну негрубую арифметическую ошибку или описку, никак не повлиявшую на ход дальнейшего решения, оценивается в 10-11 баллов. Отсутствие одного из возможных случаев, не отличающихся принципиально от разобранных в решении, оценивается в 6-8 баллов. Отсутствие в решении одного из возможных, принципиально разных, случаев оценивается в 4 балла. Решение, содержащее верную идею, и при этом содержащее грубую арифметическую ошибку, не повлиявшую на ход решения, оценивается в 5-6-7 баллов. Решение, содержащее верную идею, и при этом содержащее грубую арифметическую ошибку, повлиявшую на ход решения (упростившую задачу), оценивается в 1 балл. Решение, содержащее первоначальную верную идею, но не доведенное до ответа из-за отсутствия дальнейших продуктивных идей, оценивается в 2 балла. Неверное применение метода, грубая ошибка в применении стандартного преобразования, неверная идея решения оцениваются в 0 баллов.

В 2018 году экзаменационный вариант для поступающих в 10-й класс содержал задачи самой разной степени сложности. Это было вызвано тем, что по результатам экзамена требовалось провести дифференциацию поступающих на разные образовательные программы, с разными требованиями к математической подготовке. Поступающие на программы «Биология», «География и геоэкология», «Химия» могли выполнить задания с первого по восьмое, набрав при этом количество баллов, позволявшее успешно участвовать в конкурсе. Выполнение более сложных заданий третьей части приносило дополнительные рейтинговые баллы. Поступающие на программы «Прикладные математические и информационные технологии», «Конвергенция и наукоемкие технологии», «Математика и физика» должны были достичь определенного успеха в решении задач третьей части.

Структура экзаменационных заданий на каждый год разрабатывается, исходя из графика проведения вступительных испытаний, с учетом дат проведения экзаменов на разные образовательные программы. Типы заданий, формулировки задач, темы, используемые методы решения определяются каждый год заново. Все задачи, включаемые в экзаменационные задания, соответствуют Программе вступительных испытаний. Ниже представлены задания вступительных испытаний по математике 2018 года с подробными решениями.

3. Задание для поступающих в 8 класс. Условия, решения, ответы

Образовательные программы «Математика и физика», «Конвергенция и наукоемкие технологии»

1. Вычислите $\left(7,42\cdot\frac{5}{9}-(-11,48):1\frac{4}{5}\right):0,35$.

Решение:

$$\left(7,42\cdot\frac{5}{9}-(-11,48):1\frac{4}{5}\right):0,35=\left(7,42\cdot\frac{5}{9}-(-11,48):\frac{9}{5}\right):0,35=\left(7,42\cdot\frac{5}{9}+11,48\cdot\frac{5}{9}\right):0,35=$$

$$=\frac{5}{9}\cdot(7,42+11,48):\frac{35}{100}=\frac{5}{9}\cdot18,9\cdot\frac{100}{35}=\frac{1}{9}\cdot\frac{189}{10}\cdot\frac{100}{7}=30.$$

Ответ: 30.

2. Решите уравнение $\frac{4x^2+7x+3}{4}=\frac{7x^2+3x+4}{7}$.

Решение:

$$\frac{4x^2+7x+3}{4}=\frac{7x^2+3x+4}{7}$$

Умножим левую и правую части на 28.

$$28x^2+49x+21=28x^2+12x+16$$

$$37x=-5$$

$$x=-\frac{5}{37}$$

Ответ: $-\frac{5}{37}$.

3. Стоимость покупки с учетом трехпроцентной скидки составила 1940 рублей. Сколько бы пришлось заплатить за покупку при отсутствии скидки?

Решение:

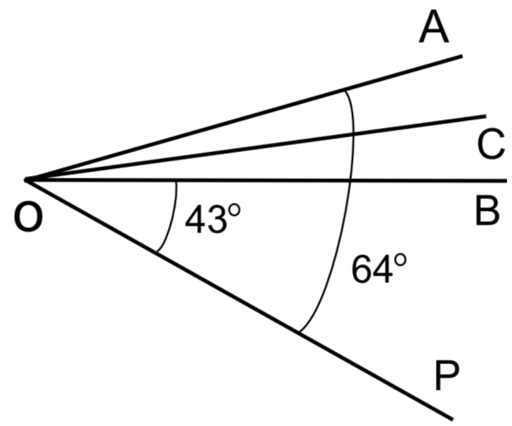
Так как скидка была трехпроцентной, стоимость покупки составила 97 процентов от исходной цены. Составим пропорцию:

$\begin{array}{l} 97\%=1940 \\ 100\%=x \end{array}$. Отсюда $\frac{97}{100}=\frac{1940}{x}$, тогда $97\cdot x=1940\cdot 100$ и $x=\frac{194000}{97}=2000$.

Ответ: 2000 рублей.

4. Точка P лежит вне угла AOB, OC – биссектриса этого угла. Найдите угол POC, если угол AOP равен 64°, а угол POB равен 43°.

Решение:



Так как угол AOP больше угла POB, то точки расположены так, что луч OB лежит внутри угла AOP. Найдем последовательно величины углов.

$\angle AOB=\angle AOP-\angle POB=64^\circ-43^\circ=21^\circ$. Так как OC - биссектриса этого угла, то

$\angle BOC=\frac{\angle AOB}{2}=\frac{21^\circ}{2}=10,5^\circ$, тогда $\angle POC=\angle POB+\angle BOC=43^\circ+10,5^\circ=53,5^\circ$.

Ответ: $53,5^\circ$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases}(x-3y)(x+4)=0,\\ x-5y=1.\end{cases}$

Решение:

Первое уравнение приводит к двум возможностям: $x-3y=0$ или $x+4=0$.

Разберем эти варианты по отдельности. Выразим x и подставим во второе уравнение.

$$\begin{cases}x=3y,\\ x-5y=1.\end{cases}\quad \begin{cases}x=3y,\\ 3y-5y=1.\end{cases}\quad \begin{cases}x=3y,\\ -2y=1.\end{cases}\quad \begin{cases}x=-\dfrac{3}{2},\\ y=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-4,\\ x-5y=1.\end{cases}\quad \begin{cases}x=-4,\\ -4-5y=1.\end{cases}\quad \begin{cases}x=-4,\\ -5y=-5.\end{cases}\quad \begin{cases}x=-4,\\ y=-1.\end{cases}$$

Ответ: $(-4;-1),\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.

6. Таня и Оля весят вместе 63 кг, Оля и Юля вместе весят 67 кг, Юля и Таня вместе весят 64 кг. Сколько весят вместе Таня, Оля и Юля и каждая из девочек по отдельности?

Решение:

Обозначим веса девочек Т, О и Ю, соответственно и составим систему уравнений:

$$\begin{cases}T+O=63,\\ O+Ю=67,\\ Ю+T=64.\end{cases}$$

Сложим эти три уравнения:

$$2(O+Ю+T)=194,$$
$$O+Ю+T=97.$$

Отсюда вычитанием соответствующего уравнения системы находим вес каждой девочки по отдельности:

$$Ю=(O+Ю+T)-(O+T)=97-63=34.$$
$$T=(O+Ю+T)-(O+Ю)=97-67=30.$$
$$O=(O+Ю+T)-(Ю+T)=97-64=33.$$

Ответ: Юля весит 34кг, Таня 30кг, Оля 33кг, а вместе девочки весят 97кг.

7. Олег отвечает за час на 8 вопросов теста, а Павел – на 9. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Олег закончил позже Павла на 10 минут. Сколько вопросов содержит тест?

Решение:

Допустим, в тесте было x вопросов. Олег отвечает со скоростью 8 вопросов в час, значит, на тест он потратит $\frac{x}{8}$ часов. Павел потратит $\frac{x}{9}$ часов. Зная, что Олег закончил позже Павла на $\frac{1}{6}$ часа, составим уравнение:

$$\frac{x}{8}=\frac{x}{9}+\frac{1}{6}$$

Умножим обе части на 72:

$$9x=8x+12$$
$$x=12$$

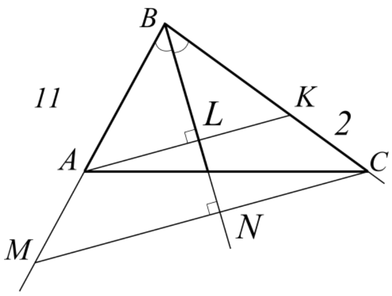
Проверим: Олег затратит на тест $\frac{12}{8}=1\frac{1}{2}$ часа, т.е. 90 минут. Павел затратит $\frac{12}{9}=1\frac{1}{3}$ часа, т.е. 80 минут. Действительно, эти времена отличаются на 10 минут.

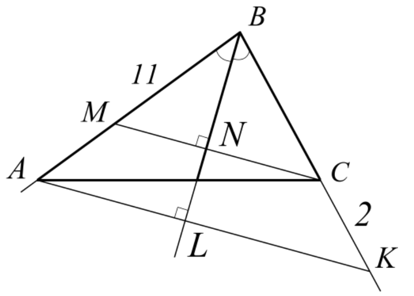
Ответ: 12 вопросов.

8. Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC, пересекающие прямые BC и AB в точках K и M соответственно. Найдите AB, если $BM=11$ и $CK=2$.

Решение:

Особенность этой задачи в том, что существует два возможных рисунка, удовлетворяющих условию задачи. В зависимости от того, какая из сторон, AB или BC, больше, точки пересечения заданных отрезков с прямыми BC и AB, лежат на сторонах треугольника или на их продолжениях. Взаимное расположение точек показано на рисунках.





Обозначим точки пересечения биссектрисы угла ABC с прямыми AK и MC L и N соответственно. Заметим, что в треугольнике MBC BN - это высота и биссектриса, значит, он - равнобедренный и $BC=BM=11$. Тогда в первом случае (рисунок слева) $BK=BC-KC=11-2=9$. В треугольнике ABK BL - это высота и биссектриса, значит, он равнобедренный, и $AB=BK=9$. Во втором случае (рисунок справа) $BK=BC+KC=11+2=13$. В треугольнике ABK BL − это высота и биссектриса, значит, он равнобедренный, и $AB=BK=13$.

Ответ: $AB=9$ или $AB=13$.

9. Упростите выражение $\frac{a}{a+2}+\left(\frac{1}{4-a^2}-\frac{1}{4-4a+a^2}\right):\frac{2}{(a-2)^2}$.

Решение:

$$\frac{a}{a+2}+\left(\frac{1}{4-a^2}-\frac{1}{4-4a+a^2}\right):\frac{2}{(a-2)^2}=\frac{a}{a+2}+\left(\frac{1}{(2-a)(2+a)}-\frac{1}{(2-a)^2}\right):\frac{2}{(a-2)^2}=$$

$$=\frac{a}{a+2}+\frac{2-a-2-a}{(2-a)^2(2+a)}\cdot\frac{(a-2)^2}{2}=\frac{a}{a+2}+\frac{-2a}{(2+a)\cdot 2}=\frac{a}{a+2}-\frac{a}{a+2}=0.$$

Ответ: 0.

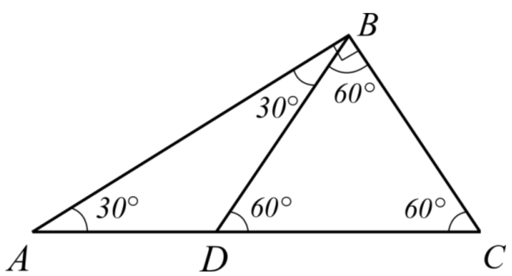
10. Пусть на доске написано натуральное число. За один ход разрешается умножить написанное число на 2, или произвольным образом переставить в нем цифры, при этом запрещается ставить 0 на первое место. Найдите последовательность ходов, позволяющей из написанного на доске числа 7 получить при такой игре 811, или докажите, что это невозможно сделать.

Решение:

Первый способ. Посмотрим на число 811. Один из предыдущих ходов, до перестановки цифр, состоял в умножении на 2, при этом получилось четное число. Из числа 811 обратной перестановкой цифр можно прийти к единственному возможному четному числу 118. $118:2=59$. Если идти дальше назад, то все перестановки цифр числа 59 (95) будут нечетными, значит, эти числа не могли получиться умножением на 2. Поэтому, начав с 7, невозможно дойти до 59 и до 95, и далее, до 811.

Второй способ. Будем учитывать каждое умножение на 2 и все возможные перестановки цифр до умножения. Из числа 7 можно получить только 14. Из 14, после перестановок цифр и однократного умножения на 2, можно получить только 28, 41, 82. Из 28 получаем 56, 82, 164. Из 41 получаем 14, 28, 82,. Из 82 получаем 28, 56, 164. Из 56 получаем 65, 112, 130. Из 65 получаем 56, 112, 130. Из 112 получаем 121, 211, 224, 242, 422. Мы перебрали все варианты, меньшие, чем 120, и не смогли получить число 118. Значит, мы не получим 811, так как это число невозможно получить без 118 – единственного четного числа, составленного из цифр 1,1,8.

11. В треугольнике ABC $\angle C=60^\circ$. На стороне AC отмечена точка D так, что $\angle BDC=60^\circ$, $\angle ABD=30^\circ$. Докажите, что $AD=BC$.



Решение:

В задаче требуется вычислить все углы, показанные на рисунке. В треугольнике BCD даны два угла $\angle BCD$ и $\angle BDC$, каждый из которых равен 60°. Значит, третий угол, $\angle DBC$, тоже равен 60°. Треугольник BCD - равносторонний, и $BC=CD$. Далее, нам дано, что $\angle ABD=30^\circ$. Отсюда, в треугольнике ABC угол $\angle B$ - прямой, т.к. его величина равна сумме углов $\angle ABD$ и $\angle DBC$. Угол $\angle A$ в треугольнике ABC легко вычисляется, он равен 30^{O}. Катет BC лежит напротив угла 30^{O}, значит, он вдвое короче гипотенузы AC. Гипотенуза AC составлена из двух отрезков, AD и CD. Так как $BC = CD$, и $AC = 2BC = AD + CD = AD + BC$, то $AD = BC$.

12. Написано двенадцать последовательных целых чисел, среди них могут быть и отрицательные. Назовем число из этого набора «интересным», если после его вычеркивания сумма оставшихся одиннадцати чисел является квадратом целого числа. Какое наибольшее количество «интересных» чисел может быть в таком наборе? Полностью обоснуйте свой ответ.

<u>Решение:</u>

Пусть написаны двенадцать последовательных целых чисел. Возьмем два соседних числа, n и $n+1$, и по очереди удалим их из набора, каждый раз вычисляя сумму одиннадцати оставшихся чисел. Легко заметить и доказать, что если сначала вычеркнуть правое число $n+1$, а затем n, то во втором случае сумма увеличится на 1. Обобщим на все написанные числа. Если мы возьмем подряд идущие числа от n до $n+11$, вычислим сумму чисел от n до $n+10$ (вычеркнули последнее), а затем по очереди будем двигаться влево и вычеркивать одно следующее число, то сумма каждый раз будет увеличиваться на 1. Таким образом, мы сможем получить двенадцать сумм, разность между большей (последней) и меньшей (первой) равна 11. Это значит, что мы не можем представить в виде указанных сумм квадраты чисел, отстоящие друг от друга дальше, чем на 11. Расстояние между соседними квадратами 36 и 25 равно 11, если увеличивать числа, то эта разность возрастает: $(k+1)^2 - k^2 = (k+1-k)(k+1+k) = 2k+1$. Поэтому наибольшее число квадратов, отличающихся друг от друга не больше, чем на 11, следует искать среди чисел, близких к нулю. Отсюда следует, что больше, чем четыре квадрата, получить нельзя. Т.е. «интересных» чисел не может быть больше четырех. Действительно, квадраты 0, 1, 4, 9 отличаются не более, чем на 11. Если добавить к набору следующий квадрат, 16, то придется убрать из набора 0, 1, 4 (16-11=5).

Осталось показать, как можно получить квадраты 0, 1, 4, 9. Напишем числа от −5 до 6.

$$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

«Интересными» являются числа $6, 5, 2, -3$.

$$(-5)+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5=0$$

$$(-5)+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+6=1$$

$$(-5)+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+3+4+5+6=4$$

$$(-5)+(-4)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5+6=9$$

<u>Ответ:</u> наибольшее количество «интересных» чисел в наборе – 4.

4. Задание для поступающих в 9 класс. Условия, решения, ответы

Образовательная программа «Биология и химия»

1. Вычислите $\dfrac{28{,}8:13\dfrac{5}{7}+6{,}6\cdot 1\dfrac{1}{2}}{1\dfrac{1}{80}:1{,}35}$

<u>Решение:</u>

Для успешного выполнения требуется правильно привести дроби к одному знаменателю и выполнить деление обыкновенных дробей.

$$\frac{28{,}8:13\dfrac{5}{7}+6{,}6\cdot 1\dfrac{1}{2}}{1\dfrac{1}{80}:1{,}35}=\frac{\dfrac{144}{5}:\dfrac{96}{7}+\dfrac{33}{5}\cdot\dfrac{3}{2}}{\dfrac{81}{80}:\dfrac{27}{20}}=\frac{\dfrac{21}{10}+\dfrac{99}{10}}{\dfrac{3}{4}}=16$$

<u>Ответ:</u> 16.

2. Решите уравнение $\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{4}{x+2}=\dfrac{3}{2}$.

<u>Решение:</u>

Избавимся от знаменателей – перейдем от дробно-рационального уравнения к квадратному. Для этого умножим левую и правую часть уравнения на $(x-2)(x+2)$. Сразу отметим, что числа –2 и 2 не являются корнями исходного уравнения. (Это кратко записывают как $x\neq -2; x\neq 2$.)

$$8(x+2)+8(x-2)=3(x-2)(x+2)$$

$$16x=3x^2-12$$

$$3x^2-16x-12=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.\cdot$$

Найденные корни не совпадают с числами –2 и 2, поэтому оба корня входят в ответ.

<u>Ответ:</u> $6; -\dfrac{2}{3}$.

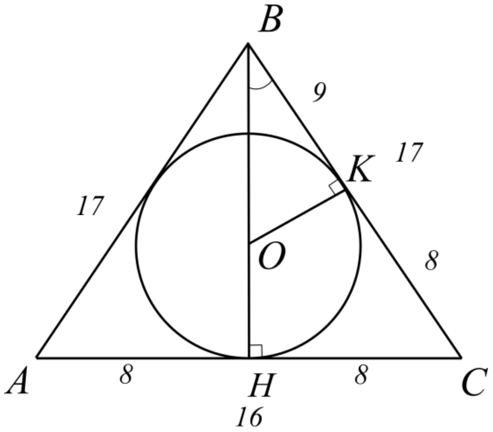
3. Ученики седьмых и восьмых классов получили в библиотеке 168 учебников, причем восьмиклассники получили на 10% книг больше, чем семиклассники. Сколько учебников получили семиклассники?

<u>Решение:</u>

10% от числа x записывается как $0{,}1x$. Пусть семиклассники получили x книг, тогда восьмиклассники получили $x+0{,}1x$ книг, т.е. $1{,}1x$ книг. Всего ученики получили $x+1{,}1x=168$. Отсюда $2{,}1x=168$, $x=80$. Для себя сделаем проверку. $80+1{,}1\cdot 80=80+88=168$. Это совпадает с условием.

Ответ: семиклассники получили 80 учебников.

4. Найдите радиус вписанной окружности равнобедренного треугольника с основанием 16 и боковой стороной 17.



Решение:

Первый способ. Обозначим вершины треугольника А, В, С так, что $AB = BC = 17$, и $AC = 16$. Пусть ВН – высота и медиана в треугольнике АВС. Тогда $AH = HC = 8$. Применив теорему Пифагору к треугольнику BHC, получим $BH = 15$.

Так как треугольник АВС равнобедренный, центр О вписанной окружности принадлежит отрезку ВН, который является биссектрисой угла АВС. Пусть ОК – перпендикуляр к ВС, Н и К – точки касания вписанной окружности со сторонами АС и ВС. Треугольники ВКО и ВНС подобны по двум углам. Отрезки касательных, проведенных из точки С, равны между собой, т.е. СН=СК=8. Следовательно $BK = 17 - 8 = 9$.

Напишем отношение соответствующих сторон подобных треугольников ВКО и ВНС: $\frac{BK}{BH} = \frac{OK}{HC}$. Здесь ОК- радиус вписанной окружности. Таким образом, $OK = \frac{BK \cdot HC}{BH} = \frac{9 \cdot 8}{15} = 4,8$.

Второй способ. Воспользуемся известной формулой площади треугольника $S = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{P \cdot r}{2}$, здесь a - основание, h - высота, P - периметр, r - радиус вписанной окружности. Отсюда $r = \frac{a \cdot h}{a + b + c}$. Стороны треугольника нам даны, высота, проведенная к основанию, находится по теореме Пифагора (см. первый способ решения), она равна 15. Получаем:

$$r = \frac{16 \cdot 15}{16 + 17 + 17} = 4,8.$$

Ответ: 4,8.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{26}{5}, \\ x^2 - y^2 = 24. \end{cases}$

Решение:

Пусть $\frac{x}{y} = t$, тогда из первого уравнения получаем $t + \frac{1}{t} = \frac{26}{5}$,

$$5t^2-26t+5=0, \qquad t=\frac{13\pm\sqrt{169-25}}{5} \qquad \left[\begin{array}{l} t=5, \\ t=\frac{1}{5}. \end{array}\right.$$

Найденные значения t позволяют найти x и y.

1) $t=5, x=5y$.

$$\begin{cases} x=5y, \\ 25y^2-y^2=24. \end{cases} \qquad \begin{cases} x=5y, \\ y^2=1. \end{cases} \qquad \begin{cases} x=5y, \\ y=\pm 1. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=5, \\ y=1, \end{cases} \\ \begin{cases} x=5, \\ y=-1. \end{cases} \end{array}\right.$$

2) $t=\frac{1}{5}, y=5x$.

$$\begin{cases} y=5x, \\ x^2-25x^2=24. \end{cases} \qquad \begin{cases} y=5x, \\ x^2=-1. \end{cases}$$

Эта система решений не имеет.

Ответ: $(-5;-1),(5;1)$.

6. Решите неравенство $\frac{x^2-x-6}{2x^2+9}\geq 0$.

Решение:

Знаменатель $2x^2+9$ больше нуля при любом значении переменной, поэтому неравенство равносильно неравенству $x^2-x-6\geq 0$.

$$(x-3)(x+2)\geq 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} x\geq 3, \\ x\leq -2. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-2]\cup[3;\infty)$.

7. Найдите, при каком значении параметра c расстояние между точками, в которых парабола $y=x^2-4x+c$ пересекает ось OX, равно 8.

Решение:

Первый способ. Парабола пересекает ось OX в точках, в которых $y=0$. Найдем эти точки.

$$x^2-4x+c=0,$$

$$x=2\pm\sqrt{4-c}.$$

Вычислим расстояние между точками пересечения параболы с осью OX, для этого вычтем из большего корня уравнения меньший. Потребуем, чтобы это расстояние равнялось 8.

$$2+\sqrt{4-c}-\left(2-\sqrt{4-c}\right)=8,$$

$$2\sqrt{4-c}=8,$$

$$4-c=16,$$

$$c=-12.$$

Подставим $c=-12$ в исходную формулу, получим функцию $y=x^2-4x-12$. Значение этой функции равно нулю при $x=-2$ и $x=6$, а расстояние между этими точками равно 8.
Второй способ. Уравнение параболы $y=x^2-4x+c$ говорит нам, что ее вершина имеет координату $x_0=2$. Это значит, что корни квадратного трехчлена, а также точки, в которых парабола пересекает ось OX, расположены симметрично относительно $x_0=2$. Так как расстояние между корнями равно 8 по условию, можем найти корни. (Расстояние от оси симметрии до каждого корня равно половине 8, т.е. 4).

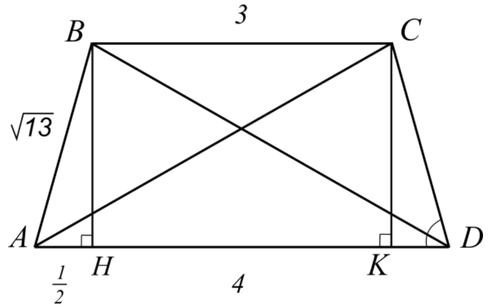
$$x_1=2-4=-2,\ x_2=2+4=6.$$

Если мы знаем произведение корней, то знаем коэффициент c в уравнении $y=x^2-4x+c$.

$$c=x_1\cdot x_2=-2\cdot 6=-12.$$

Остается сделать проверку – убедиться, что найденная функция $y=x^2-4x-12$ имеет корни.
Ответ: $c=-12$.

8. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна $\sqrt{13}$, а основания равны 3 и 4. Найдите диагональ трапеции.



Решение:
Пусть в трапеции $ABCD$ BC и AD - основания, $BC=3, AD=4$, AB и CD - боковые стороны, $AB=CD=\sqrt{13}.$ Так как трапеция равнобедренная, её диагонали равны между собой.
Проведем высоты BH и CK, тогда $AH=KD=\frac{1}{2}$, и $HD=\frac{7}{2}$. Далее покажем два способа решения.
Первый способ. В треугольнике ABH по теореме Пифагора найдем высоту BH

$$BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=\sqrt{13-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{51}{4}}.$$

Из треугольника BHD по теореме Пифагора найдем диагональ

$$BD=\sqrt{BH^2+HD^2}=\sqrt{\frac{51}{4}+\frac{49}{4}}=5.$$

Второй способ. В тех же обозначениях найдем косинус угла ADC.

$$\cos(\angle ADC)=\frac{KD}{CD}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{13}}=\frac{1}{2\sqrt{13}}.$$

Диагональ трапеции можно найти, применив теорему косинусов к треугольнику ADC.

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos(\angle ADC),$$

$$AC^2 = 4^2 + \left(\sqrt{13}\right)^2 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{1}{2\sqrt{13}} = 16 + 13 - 4 = 25,$$

$$AC = 5.$$

Ответ: диагональ трапеции равна 5.

9. Наташа и Оля вяжут шарфы. Для того, чтобы связать один ряд шарфа, Наташе требуется на 2 минуты больше, чем Оле. Сколько рядов может связать каждая из них за час, если за это время Наташа вяжет на 1 ряд меньше, чем Оля?

Решение:

Пусть Наташа вяжет x рядов в час, а Оля - $x+1$ рядов в час. При этом Оля вяжет один ряд шарфа за t минут, а Наташа - за $t+2$ минут. Составим пропорции, выражающие производительность обеих девочек.

Производительность Наташи:

$$\frac{x}{60} = \frac{1}{t+2}$$

Производительность Оли:

$$\frac{x+1}{60} = \frac{1}{t}$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{60} = \dfrac{1}{t+2}, \\ \dfrac{x+1}{60} = \dfrac{1}{t}. \end{cases}$$

Выразим переменную t из первого уравнения и подставим во второе:

$$\begin{cases} t = \dfrac{60}{x+1}, \\ x(62+2x) = 60(x+1). \end{cases}$$

В задаче требуется найти x, поэтому решим второе уравнение системы:

$$2x^2 + 62x - 60x - 60 = 0$$

$$x^2 + x - 30 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -6, \\ x = 5. \end{array} \right.$$

По условию задачи $x > 0$, поэтому подходит только значение 5.

Проверка. Действительно, на один ряд Наташа затрачивает 60:5=12 минут, Оля затрачивает 60:6=10 минут, как и сказано в условии.

Ответ: Наташа может связать 5 рядов за час, а Оля – 6 рядов.

10. Постройте график функции $y = \begin{cases} |x| - 5, |x| \geq 5 \\ 25 - x^2, \ |x| < 5 \end{cases}$. Обоснуйте свой ответ. Найдите, при каких значениях параметра a прямая $y = a$ пересекает график ровно в двух точках.

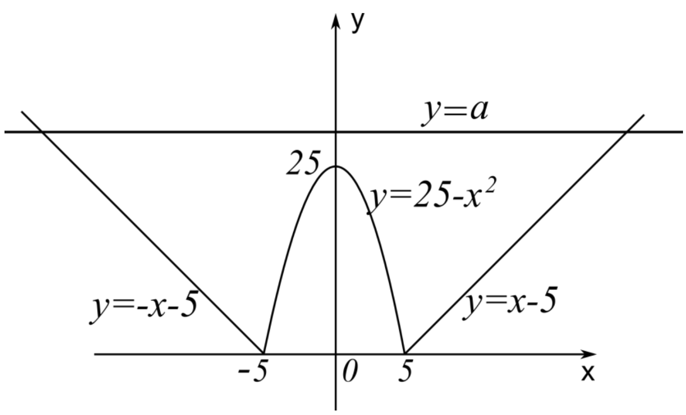
Решение:

Функция представляет собой кусочно-заданную функцию. Ее необходимо рассмотреть на трех промежутках, на которых модуль разбивает всю числовую ось. Напомним, что при раскрытии модуля следует рассмотреть промежутки, на которых выражение, стоящее под модулем, сохраняет свой знак.

$$y=\begin{cases}-x-5,\ x\le -5,\\ 25-x^2,\ -5<x<5,\\ x-5,\ x\ge 5.\end{cases}$$

Первый и третий сегмент графика – это лучи. Соответствующие прямые строятся по двум точкам. Нам обязательно потребуются значения $y(-5)=-(-5)-5=5-5=0$ и $y(5)=5-5=0$. Средний сегмент представляет собой часть параболы $y=25-x^2$. Напомним, что параболу требуется строить по характерным точкам (вершина, точки пересечения с осями, направление ветвей) или с помощью преобразования табличного графика $y=x^2$. Решение, содержащее только таблицу значений квадратичной функции, не может рассматриваться как полное. В нашем случае вершина параболы находится в точке с координатами $(0;25)$. Эта вершина находится на оси OY. Парабола пересекает ось OX в точках с координатами $(-5;0)$ и $(5;0)$, так как $x=\pm 5$ - два корня квадратичной функции $y=25-x^2$.

График имеет вид



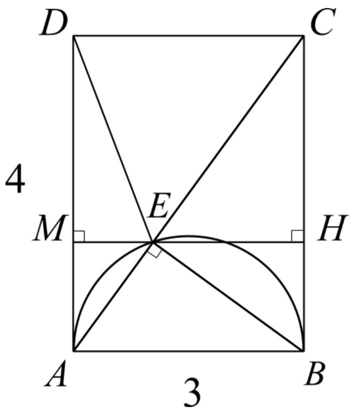
Заметим, что данная нам функция является четной. Действительно, для всех значений переменной $y(-x)=y(x)$, так как $|-x|=|x|$ и $(-x)^2=(x)^2$. График этой функции симметричен относительно оси OY.

По графику получаем, что горизонтальная прямая $y=a$ может пересечь график дважды тогда и только тогда, когда она совпадает с осью OX или проходит выше вершины параболы. Ответом являются значения $a=0$ и $a>25$.

Ответ: График показан на рисунке. Прямая $y=a$ пересекает график ровно в двух точках при $a=0$ и $a>25$.

11. Дан прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=3$ и $BC=4$. Сторона AB является диаметром окружности, которая пересекает диагональ AC в точке E. Найдите радиусы

вписанной и описанной окружностей треугольника BEC, а также площадь треугольника AED.



Решение:

1) $\angle AEB = 90^\circ$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр AB. Тогда треугольник BEC - прямоугольный с гипотенузой BC, а радиус описанной окружности такого треугольника равен половине гипотенузы, то есть $R = \frac{1}{2}BC = 2$.

2) BE - высота в прямоугольном треугольнике ABC. Гипотенуза $AC = 5$, а $BE = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4.$

В прямоугольном треугольнике BEC по теореме Пифагора находим

$$CE = \sqrt{BC^2 - BE^2} = \sqrt{4^2 - 2,4^2} = 3,2.$$

Воспользуемся формулой, выражающей радиус вписанной окружности прямоугольного треугольника через его катеты и гипотенузу:

$$r = \frac{BE + CE - BC}{2} = \frac{2,4 + 3,2 - 4}{2} = 0,8.$$

Можно было воспользоваться формулой, связывающей радиус вписанной окружности, полупериметр и площадь:

$$\frac{1}{2} \cdot BE \cdot CE = r \cdot \frac{BE + CE + BC}{2},$$

$$r = \frac{BE \cdot CE}{BE + CE + BC} = \frac{2,4 \cdot 3,2}{2,4 + 3,2 + 4} = \frac{7,68}{9,6} = 0,8.$$

3) Для того, чтобы найти площадь треугольника AED, найдем высоту EH треугольника BEC.

$$EH = \frac{BE \cdot EC}{BC} = \frac{3,2 \cdot 2,4}{4} = 1,92.$$

Высота EM треугольника AED вместе с высотой EH составляет сторону AB прямоугольника. Отсюда $EM = AB - EH = 3 - 1,92 = 1,08$.

Теперь мы готовы найти площадь AED:

$$S = \frac{1}{2} AD \cdot EM = \frac{1}{2} 4 \cdot 1,08 = 2,16.$$

Ответ: $R = 2;\quad r = 0,8;\quad S(\triangle AED) = 2,16.$

12. Дано трехзначное число. Сумма цифр этого числа равна 7, а сумма квадратов его цифр равна 27. Если из этого числа вычесть 396, то получится число, записанное теми же

цифрами, что и данное, но в обратном порядке. Найдите данное число. Обоснуйте свой ответ.

<u>Решение:</u>

Пусть цифры данного числа $x, y, z.$ Само число при этом представляется как $100 \cdot x + 10 \cdot y + z$. Число, записанное теми же цифрами в обратном порядке – это $100 \cdot z + 10 \cdot y + x$. Составим систему уравнений, соответствующую условию задачи:

$$\begin{cases} x + y + z = 7, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 27, \\ 100x + 10y + z - 396 = 100z + 10y + z. \end{cases}$$

Упростим третье уравнение:

$$\begin{cases} x + y + z = 7, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 27, \\ x = z + 4. \end{cases}$$

Подставим в первое уравнение переменной x из третьего уравнения и выразим переменную y:

$$\begin{cases} y = 3 - 2z, \\ (4 + z)^2 + (3 - 2z)^2 + z^2 = 27, \\ x = z + 4. \end{cases}$$

Итак, второе уравнение позволяет найти переменную z.

$$6z^2 - 4z - 2 = 0$$

$$3z^2 - 2z - 1 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} z = 1, \\ z = -\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$$

$z = -\dfrac{1}{3}$ не подходит по условию задачи, так как x, y, z - это цифры.

Подставив z в систему, найдем $x = 5; y = 1.$

Таким образом, искомое число $511.$

Систему $\begin{cases} x + y + z = 7, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 27, \\ x = z + 4. \end{cases}$ можно решить исходя из того, что x, y, z - натуральные числа или 0. Второе уравнение сразу показывает, что решения, большие 5, не подходят (квадрат 6 равен 36, остальные еще больше). Уменьшаем числа. Решение $x = 5, y = 1, z = 1$ нам подходит. Есть ли другие решения? (Подбор ответа без обоснования отсутствия других решений не является решением системы и не засчитывается как полное решение). Первое и второе уравнения сразу говорят, что натуральных чисел, кроме 1, в наборе с $x = 5$ быть не может. Теперь рассмотрим четверку. Если $x = 4$, то $z = 0$. Подстановкой убеждаемся, что этот вариант не подходит. Других решений быть не может, так как третье уравнение при $z = 0$ и $z = 1$ дает $x = 4$ и $x = 5$, а пятерка – наибольшее подходящее решение.

<u>Ответ:</u> $511.$

5. Задание для поступающих в 10 класс. Условия, решения, ответы

Все образовательные программы

1. Найдите значение выражения $\left(-\sqrt{175}-\left(4\sqrt{7}-\left(3\sqrt{112}-\sqrt{63}\right)\right)\right)$.

Решение:

Выделим множитель 7 под каждым корнем. Оказывается, второй множитель во всех случаях является квадратом натурального числа. Внимательно следим за знаками, основная ошибка – неверная расстановка знаков перед слагаемыми после раскрытия скобок.

$$\left(-\sqrt{175}-\left(4\sqrt{7}-\left(3\sqrt{112}-\sqrt{63}\right)\right)\right)=$$
$$=-\sqrt{25\cdot 7}-4\sqrt{7}+3\sqrt{16\cdot 7}-\sqrt{9\cdot 7}=$$
$$=-5\sqrt{7}-4\sqrt{7}+12\sqrt{7}-3\sqrt{7}=0$$

Ответ: 0

2. Решите систему уравнений $\begin{cases}4x+5y=21,\\ 3x-4y=8.\end{cases}$

Решение:

Это – линейная система уравнений. Можно выразить одну переменную из первого уравнения и подставить во второе. Мы решим другим способом – по очереди исключим переменные. Сначала исключаем *x*.

$$\begin{cases}4x+5y=21,\\ 3x-4y=8.\end{cases}\quad \begin{cases}12x+15y=63,\\ 12x-16y=32.\end{cases}-\quad \begin{cases}31y=31,\\ 3x-4y=8.\end{cases}\quad \begin{cases}y=1,\\ 3x-4y=8.\end{cases}$$

Теперь исключим y.

$$\begin{cases}4x+5y=21,\\ 3x-4y=8.\end{cases}\quad \begin{cases}16x+20y=84,\\ 15x-20y=40.\end{cases}+\quad \begin{cases}31x=124,\\ 3x-4y=8.\end{cases}\quad \begin{cases}x=4,\\ 3x-4y=8.\end{cases}$$

Ответ: $(4;1)$.

3. В трех школах 3080 учащихся. Во второй школе учащихся на 100% больше, чем в первой, при этом в первой на 80 учащихся меньше, чем в третьей. Сколько учащихся в каждой школе?

Решение:

Пусть x – число учащихся в первой школе. То, что учащихся во второй школе на 100% больше означает, что их число во второй школе равно $2x$. В третьей школе $x+80$ учащихся. Сложив количество учащихся в школах, получим уравнение

$$x+2x+x+80=3080$$

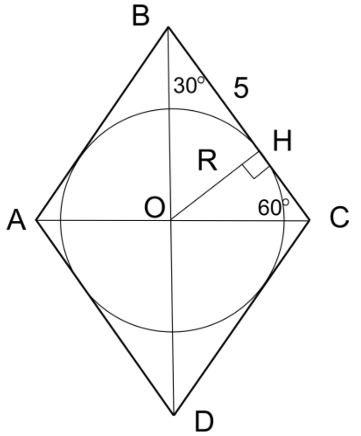
Решаем это уравнение

$$4x+80=3080$$
$$4x=3000$$
$$x=750$$

Получаем, что в первой школе 750 учащихся, во второй школе 1500 учащихся, в третьей школе 830 учащихся.

Ответ: В первой школе 750 учащихся, во второй школе 1500 учащихся, в третьей школе 830 учащихся.

4. Дан ромб со стороной 5 и острым углом 60°. Найдите радиус окружности, вписанной в этот ромб.



Решение:

Нам потребуются следующие свойства ромба. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом. Центр вписанной окружности ромба находится в точке пересечения диагоналей. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов. Обозначения указаны на рисунке. Получаем, что треугольник BOC – прямоугольный, его углы $\angle OBC = 30°, \angle OCB = 60°$. Нам требуется найти радиус окружности, вписанной в ромб, т.е. высоту треугольника BOC, проведенную из вершины прямого угла. $OB = 5 \cdot \cos 30° = 5\frac{\sqrt{3}}{2}$ по свойству тригонометрических функций углов в прямоугольном треугольнике. Этот же отрезок можно найти по теореме Пифагора, используя $OC = \frac{5}{2}$ (это– катет, лежащий против угла в $30°$, в треугольнике с гипотенузой 5). Для вычисления OH дважды напишем выражение для площади треугольника BOC.

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot OH \cdot BC$$

$$5\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5}{2} = r \cdot 5$$

$$r = \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

Задачу можно решить несколькими способами. Один из вариантов – использовать формулу, связывающую площадь, полупериметр и радиус вписанной окружности ромба.

$$S_{ABCD} = p \cdot r$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin 60° = 10 \cdot r$$

$$r = \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

В этих вычислениях площадь ромба получена как удвоенная площадь правильного треугольника.

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{4}$.

5. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 112, а сумма следующих трех ее членов равна 14. Найдите знаменатель и первый член прогрессии.

Решение:

Используем традиционные обозначения. Пусть b_1 - первый член прогрессии, q – ее знаменатель. Члены со второго по шестой, о которых говорится в задаче, записываются как $b_2 = b_1q, b_3 = b_1q^2, b_4 = b_1q^3,\ b_5 = b_1q^4, b_6 = b_1q^5$. Условие задачи приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} b_1 + b_1q + b_1q^2 = 112, \\ b_1q^3 + b_1q^4 + b_1q^5 = 14. \end{cases}$$

Решим систему. В каждом уравнении вынесем за скобку общий множитель.

$$\begin{cases} b_1(1+q+q^2) = 112, \\ b_1q^3(1+q+q^2) = 14. \end{cases}$$

Разделим второе уравнение на первое. Это можно сделать, так как у нас нет ни одного множителя, который бы равнялся нулю и давал бы при этом решение системы.

$$\begin{cases} b_1(1+q+q^2) = 112, \\ q^3 = \frac{1}{8}. \end{cases}$$

Получили, что $q = \frac{1}{2}$. Отсюда

$$1 + q + q^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$b_1 \cdot \frac{7}{4} = 112$$

$$b_1 = 64$$

Ответ: первый член прогрессии равен 64, знаменатель равен $\frac{1}{2}$.

6. Решите систему неравенств $\begin{cases} \frac{\sqrt{x+6}}{x-5} \geq 0, \\ x^2 \leq 36. \end{cases}$

Решение:

Рассмотрим первое неравенство $\frac{\sqrt{x+6}}{x-5} \geq 0$. Числитель принимает только неотрицательные значения, поэтому удобнее рассмотреть два случая в отдельности. Первый случай – числитель равен нулю. При этом $x = -6$, и знаменатель не обращается в ноль.

Второй случай, при котором дробь больше нуля, – числитель положителен и определен, знаменатель положителен.

$$\begin{cases} x > -6, \\ x > 5. \end{cases}$$

Решением первого неравенства является множество $\{-6\} \cup (5; +\infty)$.

Второе неравенство решается разложением на множители.

$$x^2 \le 36$$
$$x^2 - 36 \le 0$$
$$(x+6)(x-6) \le 0$$
$$-6 \le x \le 6$$

Решением второго неравенства является отрезок $[-6; 6]$.

Решением системы является пересечение решений этих неравенств $\{-6\} \cup (5; 6]$.

Можно было представить решение системы в виде последовательности равносильных переходов.

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+6}}{x-5} \ge 0, \\ x^2 \le 36. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+6=0, \\ x-5 \ne 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x+6>0, \\ x-5>0, \end{cases} \end{array} \right. \\ x^2 - 36 \le 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-6, \\ x>5 \end{array} \right. \\ -6 \le x \le 6. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6, \\ 5 < x \le 6. \end{array} \right.$$

Ответ: $\{-6\} \cup (5; 6]$.

7. Упростите выражение $2\sqrt{5} + \left(\sqrt{5}-3\right)\left(2\sqrt{5}-3\right)\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^{-2}}$.

Решение:

$$\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^{-2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^2}} = \frac{1}{\left|\sqrt{5}-3\right|} = \frac{1}{3-\sqrt{5}}$$

Учтено, что $\sqrt{a^2} = |a|$ и что $3 > \sqrt{5}$.

Теперь перейдем к задаче.

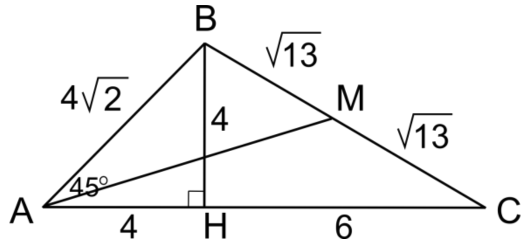
$$2\sqrt{5} + \left(\sqrt{5}-3\right)\left(2\sqrt{5}-3\right)\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^{-2}} = 2\sqrt{5} + \left(\sqrt{5}-3\right)\left(2\sqrt{5}-3\right)\frac{1}{3-\sqrt{5}} =$$
$$= 2\sqrt{5} - \left(\sqrt{5}-3\right)\left(2\sqrt{5}-3\right)\frac{1}{\sqrt{5}-3} = 2\sqrt{5} - \left(2\sqrt{5}-3\right) =$$
$$= 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 3 = 3$$

Ответ: 3.

8. В треугольнике ABC угол A равен $45°$, BH – высота, причем $AH = 4$, $HC = 6$. Найдите длину медианы, проведенной из вершины A.

Решение:

Обозначения показаны на рисунке.



Условие задачи допускает единственный рисунок. (При решении задачи это необходимо проверить, по крайней мере, на черновике). Треугольник ABH - прямоугольный и равнобедренный, так как один его угол равен $45°$. Отсюда высота BH треугольника ABC равна 4. Сторона AC равна 10. Далее можно решать несколькими способами.

Первый способ. Дважды используя теорему Пифагора, найдем стороны треугольника $AB = 4\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$. Длину медианы можно найти по формуле

$$m_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}.$$

$$AM = \frac{\sqrt{2(4\sqrt{2})^2 + 2\cdot 10^2 - \sqrt{52}^2}}{2} = \sqrt{53}$$

Второй способ. В прямоугольном треугольнике BCH найдем косинус угла C.

$$\cos C = \frac{HC}{BC} = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

Применив теорему косинусов к треугольнику ACM, найдем его сторону AM.

$$AM^2 = AC^2 + CM^2 - 2\cdot AC\cdot CM\cdot \cos C =$$

$$= 10^2 + (\sqrt{13})^2 - 2\cdot 10\cdot \sqrt{13}\cdot \frac{3\sqrt{13}}{13} =$$

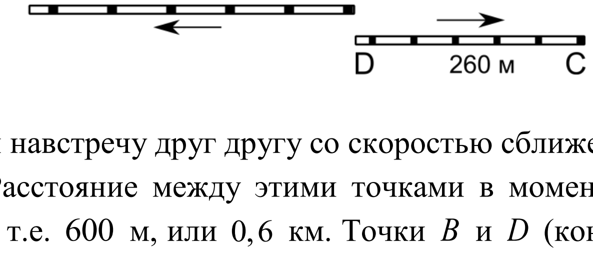
$$= 100 + 13 - 60 = 53$$

Ответ: $\sqrt{53}$.

9. Навстречу друг другу по прямому отрезку пути едут два поезда, у первого поезда скорость 50 км/ч, а длина равна 340 метрам, у второго поезда скорость 70 км/ч, а длина— 260 метров. Каково расстояние (вдоль железной дороги) от точки, в которой встретятся начала этих поездов до точки, в которой встретятся концы этих поездов?

Решение:

Изобразим для наглядности поезда отрезками AB и CD.



Точки B и D движутся навстречу друг другу со скоростью сближения $50+70$ км/ч, т.е. со скоростью 120 км/ч. Расстояние между этими точками в момент встречи локомотивов составляет $340+260$ м, т.е. 600 м, или $0,6$ км. Точки B и D (концы поездов) встретятся через $\frac{0,6}{120}=\frac{1}{200}$ часа. За это время точка B пройдет $50\cdot\frac{1}{200}=\frac{1}{4}$ км, это составляет 250 м. Эта точка не доедет до места встречи точек A и C расстояние, равное $340-250=90$ м. Отсюда точка, в которой встретятся начала поездов, находится на расстоянии 90 м от точки, в которой встретятся концы поездов.

Ответ: 90 м.

10. При каких значениях c вершина параболы $y=x^2-8x+c$ находится на расстоянии, равном 5, от точки $A(1;1)$?

Решение:

Первый способ. Как известно, абсцисса вершины параболы $y=ax^2+bx+c$ находится по формуле $x_0=-\frac{b}{2a}$. В нашем случае $x_0=-\frac{-8}{2}=4$. Ордината вершины параболы $y_0=y(4)=4^2-8\cdot 4+c=c-16$. Таким образом, вершина параболы имеет координаты $(4;c-16)$. Расстояние между вершиной и точкой A найдем по формуле расстояний между точками $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. Получаем $d=\sqrt{(4-1)^2+(c-16-1)^2}=\sqrt{c^2-34c+298}$. Требуется, чтобы это расстояние равнялось 5. Получаем уравнение

$$\sqrt{c^2-34c+298}=5$$
$$c^2-34c+298=25$$
$$c^2-34c+273=0$$

Его решения $c=13$ и $c=21$.

Второй способ. Выделим полный квадрат в уравнении параболы $y=x^2-8x+c$.

$y=x^2-8x+c=(x-4)^2+c-16$

Заметим, что вершина всех таких парабол имеет абсциссу $x_0=4$. Вершина перемещается вдоль оси OY при изменении параметра c. Вдоль оси OX расстояние между точкой A и вершиной параболы равно 3 (Т.е. расстояние между проекциями этих точек на ось OX равно 3). Так как расстояние между этими точками должно быть равно 5, то расстояние вдоль оси OY между точкой A и вершиной параболы должно равняться 4 (по теореме Пифагора). Поэтому вершина параболы может иметь ординату $1+4=5$ или $1-4=-3$. Отсюда $c-16=5, c=21$ или $c-16=-3, c=13$.

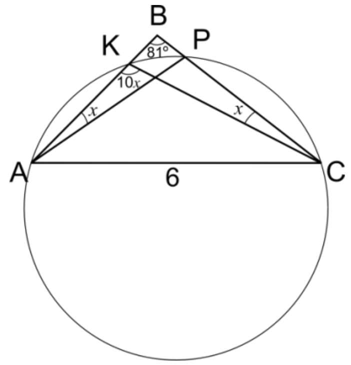
При любом способе решения существование двух возможных положений вершины должно быть обосновано.

Ответ: $c=13$ и $c=21$.

11. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает стороны AB и BC в точках K и P соответственно. Найдите радиус окружности, если угол ABC равен $81°$, $AC=6$, а угол AKC в 10 раз больше угла KAP.

Решение:

Четырехугольник $AKPC$ вписан в окружность, поэтому углы KAP и KCP равны между собой. Обозначим величину этих углов x, тогда величина угла AKC равна $10x$.



Угол AKC является внешним углом треугольника KBC, поэтому его величина равна сумме углов KBC и BCK, т.е. $81°+x$. Получаем уравнение

$$81°+x=10x$$

Отсюда $x=9°$, величина угла AKC равна $90°$, т.е. AC - диаметр окружности, и ее радиус получается равным 3.

Мы неявно доказали, что угол ABC равен полуразности угловых величин дуг, которые он отсекает от окружности. Решение может быть построено с использованием этой теоремы.

Ответ: 3.

12. Пусть A - некоторое число. Число B получено из A некоторой перестановкой его цифр (0, если он есть, в начало не ставится). Найдите минимальное значение n, при котором разность $A-B$ будет числом, записываемым ровно n единицами ($n>0$). Полностью обоснуйте свой ответ.

Решение:

Докажем, что любое натуральное число и сумма его цифр дают одинаковые остатки при делении на 9. Пусть a - число, имеющее цифру a_k в k-м разряде. Это означает, что $a=\ldots+a_k\cdot 10^k+\ldots$. Пусть S_a - сумма цифр числа a. Составим разность $a-S_a$. Эта разность будет состоять из пар вида $a_k\cdot 10^k-a_k$. Выполним преобразования и воспользуемся формулой разности степеней.

$$a_k\cdot 10^k-a_k=a_k\cdot(10^k-1)=a_k\cdot(10-1)\cdot(10^{k-1}+\ldots 10+1)=a_k\cdot 9\cdot(10^{k-1}+\ldots 10+1).$$

Каждая пара вида $a_k\cdot 10^k-a_k$ делится на 9. Это означает, что разность числа и суммы его цифр делится на 9.

Вернемся к решению задачи. Числа A и B имеют одинаковую сумму цифр, обозначим ее S.

Разность $A-B$ можно представить как $A-S+S-B$, поэтому разность числа A и числа B, полученного из A некоторой перестановкой его цифр, делится на 9. Если эта разность равна числу, записанному n единицами, то сумма цифр такого числа тоже делится на 9, поэтому n делится на 9. Отсюда минимальное значение n, удовлетворяющее условию задачи, может быть равным 9. Осталось привести пример, доказывающий, что значение $n=9$ достигается. Таких примеров можно составить несколько, приведем один из них.

$$\begin{array}{r} _{-}\,907654132 \\ 796543021 \\ \hline 111111111 \end{array}$$

Ответ: минимальное значение n равно 9.

6. Демонстрационные варианты экзаменационных заданий 2018 г.

(Задания для самостоятельного решения)

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ 2018

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АКАДЕМИЧЕСКАЯ ГИМНАЗИЯ им. Д.К.ФАДДЕЕВА

Предмет вступительного испытания: ***МАТЕМАТИКА***
Класс обучения на образовательной программе:
8 класс, образовательные программы «Математика и физика», «Конвергенция и наукоемкие технологии»
Критерии оценивания:
Каждая из задач с 1 по 4 оценивается от 0 до 5 баллов.
Каждая из задач с 5 по 8 оценивается от 0 до 8 баллов.
Каждая из задач с 9 по 12 оценивается от 0 до 12 баллов.

1. Найдите значение выражения $(2m-n)^2+(m+2n)^2$ при $m=\dfrac{12\frac{1}{2}+\frac{6}{5}-0,6\cdot 1,5}{4}$, $n=\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{5}{6}\right)\cdot\dfrac{204}{35}$.
2. Решите уравнение $3(x+1)(x+2)=12+(3x-4)(x+2)$.
3. В январе килограмм винограда стоил 200 рублей. В марте цена на виноград выросла на 4%, а в июне снизилась на 4%. Сколько стоил виноград в июне?
4. На сторонах угла A, равного 127°, отмечены точки B и C, а внутри угла – точка D так, что $\angle ABD=25^\circ$, $\angle ACD=19^\circ$. На луче BD отмечена точка P так, что точка D лежит между точками B и P. Найдите угол PDC.
5. Решите систему уравнений $\begin{cases}4x^2-49y^2=10(2x-7y),\\ x+y=45.\end{cases}$
6. Сумма трех различных целых положительных чисел равна 80. Какое наибольшее значение может принять сумма трех их попарных разностей? В каждой разности из большего числа вычитается меньшее. Обоснуйте свой ответ.
7. Петя и Вася вскапывают грядку за 10 минут, а один Петя – за 15 минут. На сколько минут Вася дольше Пети вскапывает грядку, работая один?
8. В треугольнике ABC высоты AH и BP равны между собой, угол ABP равен углу CAH. Найдите углы треугольника.
9. Если перемножить все цифры некоторого натурального числа на само это число, то получится 10472. Найдите все числа, обладающие таким свойством. Ответ обоснуйте.
10. Представьте выражение x^8+6x^4+25 в виде произведения двух многочленов.
11. Внутри равностороннего треугольника отмечена точка. Докажите, что сумма расстояний от этой точки до двух вершин треугольника больше, чем расстояние от этой точки до третьей вершины.
12. В устройстве памяти хранятся данные, занимающие ровно 500 байт. Контроллер, управляющий памятью, позволяет или записать в память сообщение длиной 198 байт, или считать сообщение длиной 300 байт и удалить его. Какой минимальный объем памяти может быть занят в этом устройстве? Можно ли полностью очистить память? Ответ обоснуйте.

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ 2018

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АКАДЕМИЧЕСКАЯ ГИМНАЗИЯ им. Д.К.ФАДДЕЕВА

Предмет вступительного испытания: ***МАТЕМАТИКА***
Класс обучения на образовательной программе:
9 класс, образовательная программа «Биология и химия»

Критерии оценивания:
Каждая из задач с 1 по 4 оценивается от 0 до 5 баллов.
Каждая из задач с 5 по 8 оценивается от 0 до 8 баллов.
Каждая из задач с 9 по 12 оценивается от 0 до 12 баллов.

1. Найдите значение выражения $\dfrac{3^2-0,363^2}{3,363}$.
2. Решите уравнение $4x^4+3x^2-1=0$.
3. Численность волков в двух заповедниках составляла 210 особей. Через год обнаружили, что в первом заповеднике численность волков выросла на 10%, а во втором – на 30%. В результате общая численность волков в двух заповедниках составила 251 особь. Сколько волков было в каждом из двух заповедников первоначально?
4. Найдите периметр прямоугольного треугольника, вписанного в окружность радиуса 7,5 см, если один из его катетов равен 12.
5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x^2-y=7, \\ 5y-3x^2=-23. \end{cases}$
6. Решите неравенство $\dfrac{x^2-20}{5x^2+12} \le \dfrac{x-8}{5x^2+12}$.
7. Парабола $y=x^2+6x+c$ пересекает ось OY в точке с ординатой -10. Найдите наименьшее возможное значение a, при котором прямая $y=a$ имеет хотя бы одну общую точку с этой параболой.
8. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке O, которая удалена от прямой CD на 6 см. Найдите площадь треугольника AOB, если $CD=8$ см.
9. Если между цифрами двузначного числа *a* вписать это же число, то полученное четырехзначное число будет в 99 раз больше этого двузначного числа. Найдите двузначное число *a*.
10. Изобразите множество точек $(x;y)$ координатной плоскости, для каждой из которых выполняется $\dfrac{x^2+y-2}{x+3}=0$. Укажите в этом множестве все точки, равноудаленные от осей координат. Ответ полностью обоснуйте.
11. Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если $AK=6$ см, а сторона AC в 1,5 раза больше стороны BC.
12. На странице во всех строках одно и то же число букв. Если увеличить число строк и число букв в строке на 7, то число букв на странице увеличится на 476. На сколько уменьшится число букв на странице, если уменьшить число строк и число букв в строке на 4?

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ 2018

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АКАДЕМИЧЕСКАЯ ГИМНАЗИЯ им. Д.К.ФАДДЕЕВА

Предмет вступительного испытания: ***МАТЕМАТИКА***
Класс обучения на образовательной программе:
10 класс, все образовательные программы
Критерии оценивания:
Каждая из задач с 1 по 4 оценивается от 0 до 5 баллов.
Каждая из задач с 5 по 8 оценивается от 0 до 8 баллов.
Каждая из задач с 9 по 12 оценивается от 0 до 12 баллов.

1. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{99}+\sqrt{363}-3\sqrt{11}}{33\sqrt{3}}$.
2. Решите уравнение $(x^2+27x-57)^2=(x^2-3x+1)^2$.
3. Семья состоит из трех человек: матери, отца, дочери. Если бы зарплата матери увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 30%. Если бы стипендия дочери увеличилась втрое, общий доход семьи вырос бы на 6%. Сколько процентов дохода составляет зарплата отца?
4. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если радиус его описанной окружности равен $6{,}5$, а радиус вписанной окружности равен 2.
5. Найдите шестой и десятый члены геометрической прогрессии, если известно, что их сумма квадратов равна 136, а произведение четырнадцатого и второго членов этой прогрессии равно 60.
6. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+16}}{x-12} \le \dfrac{\sqrt{x+16}}{x+12}, \\ x^2+16x \le 0. \end{cases}$
7. Найдите на прямой $2x+3y+2=0$ точку $K(x,y)$ такую, что произведение ее координат – наибольшее возможное.
8. Точка М лежит внутри равностороннего треугольника на расстоянии $3\sqrt{3}$ от двух его сторон и на расстоянии $4\sqrt{3}$ от третьей стороны. Найдите длину стороны данного треугольника и радиус окружности, описанной вокруг этого треугольника.
9. На доске написаны два трехзначных числа. Если не обратить внимание на знак умножения и прочитать эти два числа как одно шестизначное, то прочитанное число будет в семь раз больше произведения этих трехзначных чисел. Найдите трехзначные числа. Ответ обоснуйте.
10. Про функцию $f(x)$ известно, что $f(x)$ - четная, $f(x)=x^2-2ax+a^2-1$ при $x\ge 0$ и график функции $f(x)$ имеет с прямой $y=2x-8$ ровно одну общую точку. Найдите значение параметра a, напишите, каким уравнением задается $f(x)$ при $x<0$, и постройте график $f(x)$.
11. В треугольнике ABC проведены высоты AN и BM и отмечена точка K – середина стороны AB. Найдите площадь треугольника MNK, если известно, что угол ACB равен 105°, а длина AB равна 16.
12. Курс акций компании каждый день ровно в 12 час повышается или понижается на *n* процентов, где *n* – целое положительное число, меньшее 100. Курс не округляется. Существует ли *n,* для которого курс акций может дважды принять одно и то же значение? Ответ обоснуйте.

7. Ответы к демонстрационным вариантам

Вариант в 8 класс

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
109	$-\frac{2}{7}$	199 руб. 68 коп.	9^{o}	$(61;-16)$, $(35;10)$	152	15	60^0, 60^0, 60^0	187	$(x^4-2x^2+5)\times$ $\times(x^4+2x^2+5)$	Воспользуйтесь неравенством треугольника. Проведите окружность с центром в третьей вершине и радиусом, равным стороне	Остаток от деления на 2 сохраняется. Отсюда наименьшее значение равно 2. Приведите пример.

Вариант в 9 класс

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2,637	$-0,5$, $0,5$	110 и 100	36	$(-1;-4)$, $(1;-4)$	$[-3;4]$	-19	24	45	Парабола $y=2-x^2$ с выколотой точкой $(-3;-7)$. Точки, равноудаленные от осей координат, лежат на пересечении графика с биссектрисами координатных углов $y=x$ и $y=-x$ $(1;1),(-2;\ -2),$ $(-1;1),(2;\ -2)$.	4	228

Вариант в 10 класс

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{3}$	-14, 2, $\frac{29}{15}$,	67%	5 и 12	-10 *и* -6; -6 *и* -10; 6 *и* 10; 10 *и* 6	$\{-16\}\cup$ $\cup(-12;0]$	$\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)$	$a=20$, $R=20\frac{\sqrt{3}}{3}$	143 и 143	$a=3$, $y=x^2+6x+8$	16	Докажите, что уравнение $(100+n)^k\cdot$ $\cdot(100-n)^l=$ $=100^{k+l}$ не имеет целых решений. Ответ: не может.

8. Литература

1. Никольский С.М., Потапов М.К. и др. Алгебра. // 8 кл. М.: Просвещение, 2014.
2. Никольский С.М., Потапов М.К. и др. Алгебра. // 9 кл. М.: Просвещение, 2014.
3. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре. // 8-9 кл. М.: Просвещение, 2010.
4. Мордкович А.Г., Николаев Н.П. Алгебра. В 2 ч. Ч.1 Учебник для 8 кл. // М.: Мнемозина, 2008
5. Мордкович А.Г., Николаев Н.П. Алгебра. В 2 ч. Ч.2 Учебник для 9 кл. // М.: Мнемозина, 2008
6. Шарыгин И.Ф., Геометрия. 7-9 кл. // М.: Дрофа, 2012
7. Бутузов В.Ф., Кадомцев СБ., Прасолов ВВ. // Геометрия. 7 класс. М.: Просвещение, 2016
8. Бутузов В.Ф., Кадомцев СБ., Прасолов ВВ. // Геометрия. 8 класс. М.: Просвещение, 2016
9. Бутузов В.Ф., Кадомцев СБ., Прасолов ВВ. // Геометрия. 9 класс. М.: Просвещение, 2016
10. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. и др. // Геометрия 8 кл. М.: Просвещение, 2014
11. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. и др. // Геометрия 9 кл. М.: Просвещение, 2014
12. Зив Б.Г., Задачи к урокам геометрии. 7-11 классы. // СПб.: Петроглиф, Виктория плюс, 2012.
13. Шарыгин И.Ф., Геометрия. Планиметрия. 9-11 класы. // М.: Дрофа, 2001
14. Прасолов В.В., Задачи по планиметрии.// М.: МЦНМО, 2006.
15. Берлов С.Л., Иванов С.В., Кохась К.П. Петербургские математические олимпиады / СПб.: Издательство «Лань», 1998
16. Всероссийская олимпиада школьников по математике. 1993-2009. Задачи и решения. Под ред. Н.Х.Агаханова // М., МЦНМО, 2017