

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ
по МАТЕМАТИКЕ
для поступающих на 1-й курс на основные образовательные программы
бакалавриата и программы подготовки специалиста
по результатам вступительных испытаний, проводимых СПбГУ
самостоятельно

Раздел I. Основные вопросы и темы.

1. Линейная функция.
 - 1.1. Уравнение прямой.
2. Модуль числа.
 - 2.1. Геометрический смысл модуля. Кусочно-линейные функции (модуль, целая часть, дробная часть).
3. Дробно-линейные функции.
 - 3.1. График дробно-линейной функции.
4. Квадратное уравнение.
 - 4.1. Теорема Виета. Квадратная функция.
5. Элементарные методы доказательства неравенств.
6. Решение специальных видов уравнений третьей и четвертой степени.
7. Рациональные уравнения, неравенства и системы уравнений и неравенств.
 - 7.1. Рациональные уравнения и неравенства с параметрами.
8. Иррациональные уравнения и неравенства.
 - 8.1. Системы иррациональных уравнений.
 - 8.2. Иррациональные уравнения и неравенства с параметрами.
9. Логарифмические и показательные функции.
10. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства.
 - 10.1. Системы уравнений.
 - 10.2. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства с параметрами.
11. Тригонометрические функции.
 - 11.1. Тригонометрические преобразования.
12. Тригонометрические уравнения и неравенства.
 - 12.1. Системы уравнений и неравенств.
13. Производная.
 - 13.1. Уравнение касательной.
 - 13.2. Наибольшее и наименьшее значения функций.
 - 13.3. Число корней уравнения.
 - 13.4. Доказательство неравенств.
14. Уравнения и неравенства с двумя переменными.
 - 14.1. Решение уравнений и неравенств с параметрами.
15. Задачи на составление уравнений.
16. Вычислительные задачи по планиметрии.
 - 16.1. Задачи на доказательство.
 - 16.2. Применение векторов к решению геометрических задач.
17. Решение стереометрических задач.
18. Целые числа.
 - 18.1. Делимость целых чисел. Алгоритм Евклида. Наименьшее общее кратное, наибольший общий делитель. Взаимно простые числа. Арифметика остатков. Решение уравнений вида $ax + by = 1$.
19. Многочлены.
 - 19.1. Деление с остатком. Теорема Безу. Схема Горнера. Рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами.
 - 19.2. Основная теорема алгебры (формулировка). Разложение на множители.

Раздел II. Организационно-методический.

Испытания проводятся в формате, соответствующем ЕГЭ. Задания делятся на две части -- В и С. В части В нужно указать только ответы и внести их в бланк. В заданиях части С необходимо привести развернутое решение. Вариант оценивается из расчета 100 баллов за все полностью решенные задания.

Образец варианта вступительных испытаний

Часть В

- В1.** Первый гражданин платит подоходный налог 13%, а второй, зарабатывающий на 45% больше первого, — налог 25%. У кого из них больше чистый доход и на сколько процентов?
- В2.** Пенсия Ивана Петровича в текущем году равна 12000 рублей, а в каждом следующем году она будет проиндексирована на 5%. Найти средний размер пенсии за первые 3 года (включая текущий).
- В3.** На плоскости даны точки $A(1, -2)$, $B(1, 1)$, $C(4, 3)$, $D(8, -2)$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.
- В4.** Цены минуты телефонного разговора и одного sms положительны и кратны копейке. Суммарная стоимость 13 минут разговора и 120 sms равна 23 рубля 60 копеек. Найти цену одного sms.
- В5.** Решить неравенство $\log_{x+1}(3x+2) < 1$.
- В6.** Радиус окружности, описанной около равнобедренного тупоугольного треугольника, и основание треугольника равны 4. Найти площадь треугольника.
- В7.** Вычислить $100^{\lg \cos 15^\circ} - 100^{\lg \cos 75^\circ}$.
- В8.** Найти число минимумов функции f , если $f'(x) = 5x^2 - 4x^3 - 1$.
- В9.** В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 2, а боковое ребро равно $\sqrt{3}$. Найти угол между боковой гранью и основанием пирамиды.
- В10.** Компьютер выбирает наудачу трехзначное число. Найти вероятность того, что его крайние цифры совпадают.
- В11.** Основания правильных треугольных пирамиды и призмы лежат в одной плоскости, их стороны попарно параллельны и относятся как 4:1. Вершина пирамиды лежит в центре другого основания призмы. Найти отношение объемов непересекающихся частей пирамиды и призмы.
- В12.** Траектория полета снаряда описывается уравнениями $x(t) = 36t \cos \alpha$ и $y(t) = -9t^2 + 36t \sin \alpha$, где α — угол наклона орудия к горизонту. Каким должен быть угол α , чтобы поразить цель с координатами $x_0 = 36$ м и $y_0 = 27$ м?
- В13.** По кругу радиуса 2 км в одном направлении движутся пешеход и велосипедист, стартовав одновременно из одной точки. Скорость пешехода равна $5 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а велосипедиста — $15 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. На сколько полных кругов велосипедист обгонит пешехода через 5 часов после старта?
- В14.** Найти наибольшее значение функции $f(x) = \sqrt{2+x^2} \sin \pi x + \sqrt{2-x^2} \cos \pi x$ на отрезке $[-1, 0]$.

Часть С

С1. Решить уравнение $3\cos 2x + \sin 2x - \cos 6x + \sin 6x = 0$.

С2. Проведены две хорды окружности $AB = 2$ и $AC = 2\sqrt{3}$. Длина дуги AC вдвое больше длины дуги AB . Найти радиус окружности.

С3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x + 3^y - 30 \cdot 3^{x-y} = 0, \\ 3^x - 3^y - 8 \cdot 3^{x+y-5} = 0. \end{cases}$$

С4. Через катет прямоугольного треугольника, противолежащий острому углу 30° , проведена плоскость, составляющая с гипотенузой угол 60° . Найти угол между этой плоскостью и вторым катетом.

С5. При каких вещественных a система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + (y - a)^2 \geq 1, \\ |x - a| + |y| \leq 1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения?

С6. Известно, что три различных вещественных корня уравнения $27x^3 - 27x^2 - 18x + a = 0$ образуют арифметическую прогрессию. Найти a .

Раздел III. Рекомендуемая литература

1. Б.М.Беккер, В.М.Гольховой, Логарифмические уравнения и неравенства, СПбГУ, 1983
2. Б.М.Беккер, Тригонометрические уравнения и неравенства, СПбГУ, 1992
3. Б.М.Беккер, В.Б.Некрасов, Применение векторов для решения задач, СПб, СММО ПРЕСС, 1998
4. О.А.Иванов, Задачи по алгебре и началам анализа, Спб, БХВ-Петербург, 2005
5. В.В.Прасолов, Задачи по планиметрии, МЦНМО, 2001