Решения задач заключительного этапа

Задача 1

Рассмотрим процесс попадания пули в брусок. Согласно условию, пуля останавливается относительно бруска очень быстро, поэтому пружина не успевает заметно деформироваться, и можно считать, что в проекции на горизонтальную ось на систему “брусок+пуля” не действует внешних сил. Следовательно, скорость u, с которой брусок вместе с пулей начнут двигаться к стене, можно найти, воспользовавшись законом сохранения импульса:

$$mV = (m+M)u \qquad \Leftrightarrow \qquad u = \frac{m}{m+M}V\,. \tag{1}$$

При сжимании пружины выполняется закон сохранения полной механической энергии: кинетическая энергия бруска и пули переходит в потенциальную энергию пружины. В момент максимального сжатия длина пружины сокращается вдвое, поэтому ее деформация равна $\Delta x = L - L/2 = L/2$. Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{(m+M)u^2}{2} = \frac{k\Delta x^2}{2}\,. \tag{2}$$

Подставляя (1) в (2), для скорости пули имеем

$$V = \sqrt{k(m+M)}\,\frac{L}{2m}\,. \tag{3}$$

<u>*Ответ:*</u> скорость пули равна $\sqrt{k(m+M)}L/(2m)$.

Задача 2

Для нахождения центра масс получившейся детали воспользуемся следующим трюком. Поскольку при фиксированной суммарной массе тела положение ее центра масс *линейным* образом зависит от масс составных частей, можно формально представить деталь в виде суперпозиции целого диска и треугольника отрицательной массы с той же по модулю плотностью (см. Рис. 1).

Обозначим массу единицы площади диска за λ (эта величина измеряется в кг/м^2). Тогда масса целого диска и масса треугольника равны соответственно

$$M = \lambda\pi R^2\,, \qquad m_\Delta = -\lambda\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\,. \tag{4}$$

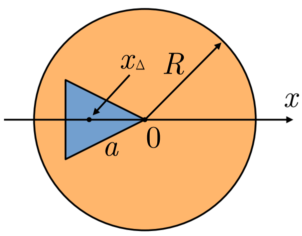

Рис. 1.

Направим ось x как показано на Рис. 1. Центр масс целого диска находится в точке с координатой $X = 0$, а центр масс треугольника — в точке пересечения его медиан, т. е. в точке с координатой $x_\Delta = -(2/3)(a\sqrt{3}/2) = -a\sqrt{3}/3$. Очевидно, что центр масс итоговой детали также находится на оси x. Теперь можно определить соответствующую координату:

$$x_0 = \frac{MX + m_\Delta x_\Delta}{M + m_\Delta} = \frac{0 + (-\lambda a^2\sqrt{3}/4)(-a\sqrt{3}/3)}{\lambda\pi R^2 + (-\lambda a^2\sqrt{3}/4)} = \frac{\sigma}{4\pi - \sigma\sqrt{3}}\,a\,, \tag{5}$$

где $\sigma = (a/R)^2 < 1$. Знаменатель в выражении (5) строго положителен, т. е. искомый центр масс расположен на диске с противоположной стороны от вырезанного треугольника, как и следовало ожидать.

<u>*Ответ:*</u> центр масс детали находится на оси симметрии на расстоянии $\sigma a/(4\pi - \sigma\sqrt{3})$ от центра исходного диска, где $\sigma = (a/R)^2$.

Задача 3

На pV-диаграмме изотермы изображаются гиперболами. При этом, чем выше проходит кривая, тем выше температура газа. Таким образом, максимальная температура в процессе ABCD достигается в точке B (см. рис. 2), обозначим ее через $T_{\max}$.

Пусть объем газа в точке D равен V, тогда, по условию, объем газа в точке C равен $2V$. Выпишем уравнения состояния идеального газа для точек C и D:

$$2p_\mathrm{C}V = \nu RT_\mathrm{C}\,, \tag{6}$$

$$p_\mathrm{D}V = \nu RT_\mathrm{D}\,. \tag{7}$$

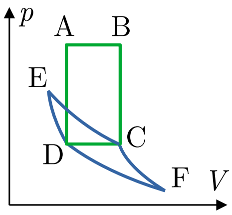

Рис. 2.

Согласно условию, точки C и D находятся на изобаре, поэтому $p_\mathrm{C} = p_\mathrm{D}$. С учетом этого из (6) и (7) получаем, что

$$T_\mathrm{C} = 2T_\mathrm{D} = 2T\,. \tag{8}$$

Уравнение состояния для точки B имеет вид:

$$2p_\mathrm{B}V = \nu RT_\mathrm{max}\,. \tag{9}$$

КПД цикла Карно равен

$$\eta_\mathrm{K} = \frac{T_\mathrm{C} - T_\mathrm{D}}{T_\mathrm{C}} = \frac{1}{2}\,. \tag{10}$$

Рассмотрим КПД цикла ABCD. По общей формуле он равен

$$\eta = \frac{A}{Q}\,, \tag{11}$$

где A — работа за цикл, Q — переданное газу количество теплоты. Работа A равна площади цикла:

$$A = (p_\mathrm{B} - p_\mathrm{C})(V_\mathrm{C} - V_\mathrm{D}) = \nu R\left(\frac{T_\mathrm{max}}{2} - T\right)\,, \tag{12}$$

где были использованы уравнения (6), (8) и (9). Найдем величину Q. Газ получает тепло на участке DAB. Согласно первому началу термодинамики, переданное газу тепло идет на изменение его внутренней энергии и на работу против внешних сил:

$$Q = \Delta U + A_\mathrm{DAB} = \frac{3}{2}\nu R(T_\mathrm{max} - T_\mathrm{D}) + p_\mathrm{B}(V_\mathrm{C} - V_\mathrm{D}) = \nu R\left(2T_\mathrm{max} - \frac{3T}{2}\right)\,. \tag{13}$$

Согласно условию, $\eta = \eta_\mathrm{K}/3$. Отсюда получаем уравнение

$$\frac{T_\mathrm{max}/2 - T}{2T_\mathrm{max} - 3T/2} = \frac{1}{6}\,. \tag{14}$$

Находим $T_\mathrm{max} = 9T/2$.

Ответ: $T_\mathrm{max} = 9T/2$.

Задача 4

Введем систему координат, выбрав за начало отсчета точку O и направив оси параллельно зеркалам и линзам, см. рис. 3. Координаты источника света при этом равны $(0,0)$. Все изображения источника на рисунке пронумерованы, всего их оказывается одиннадцать.

При падении расходящегося пучка света на плоское зеркало лучи отражаются, и на их продолжении за зеркалом формируется мнимое изображение. Расстояние от зеркала до источника света равно расстоянию от зеркала до изображения. Лучи, падающие от источника на зеркало AD, формируют изображение 1, его координаты $(-2a, 0)$. Аналогично, лучи, падающие от источника на зеркало CD, формируют изображение 2, его координаты $(0, -2a)$. Некоторые лучи, отразившиеся от зеркала AD, могут попасть на зеркало CD и отразиться от него. В результате такого двойного отражения формируется изображение изображения 1 в зеркале CD, на рисунке оно отмечено цифрой 3 и имеет координаты $(-2a, -2a)$. С другой стороны, некоторые лучи, отразившиеся от зеркала CD, могут попасть на зеркало AD и отразиться от него. В результате появится изображение изображения 2 в зеркале AD, поскольку зеркала перпендикулярны, это изображение совпадет с изображением 3.

Рассмотрим теперь попадание лучей на линзы. Лучи могут попасть на линзы непосредственно от источника света, не отражаясь от зеркал. Построим, например, изображение источника в линзе AB. Поскольку источник находится ближе фокусного расстояния, изображение будет мнимым. Так как источник лежит на главной оптической оси, изображение также будет лежать на этой оси. Его положение найдем с помощью формулы тонкой линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}\,, \tag{15}$$

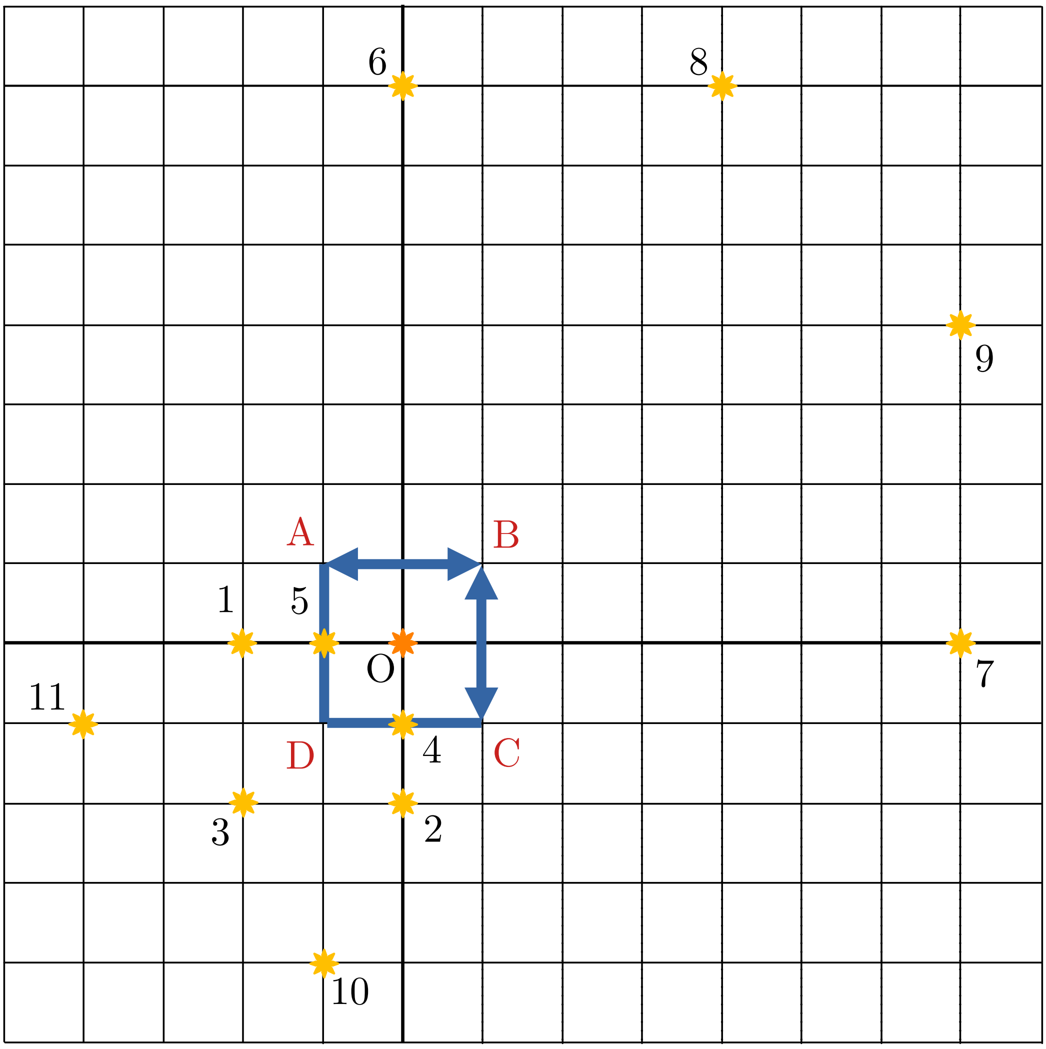

Рис. 3.

где F — фокусное расстояние, d — расстояние от источника до линзы, f — расстояние от линзы до изображения. Подставляя $F = 2a$ и $d = a$, получаем, что $f = -2a$. Отрицательное значение как раз показывает, что изображение мнимое. Откладывая данное расстояние от линзы, получаем, что изображение 4 источника в линзе AB имеет координаты $(0, -a)$. Аналогично, изображение 5 источника в линзе BC имеет координаты $(-a, 0)$.

Отразившиеся от зеркала CD лучи могут попасть на линзу AB. В результате формируется изображение изображения 2. На рисунке оно отмечено цифрой 6, его координату можно найти с помощью формулы (15). Положив $d = 3a$, получаем $f = 6a$. Откуда координаты изображения 6 равны $(0, 7a)$. Аналогично, лучи, отразившиеся от зеркала AD и попавшие на линзу BC, формируют изображение 7 с координатами $(7a, 0)$. Изображения 6 и 7 действительные.

Рассмотрим теперь лучи, которые сначала отразились от обоих зеркал, а потом попали на линзу AB. В результате формируется изображение изображения 3. На рисунке оно обозначено цифрой 8. Так как точка 3 удалена от линзы AB на такое же расстояние, что и точка 2, положения их изображений по вертикальной оси совпадают. Чтобы найти положение изображения 8 по горизонтальной оси, нужно учесть, что расстояние от источника до главной оптической оси h и расстояние от изображения до этой оси H связаны соотношением

$$H = \frac{|f|}{|d|} h \,. \tag{16}$$

Подставляя в уравнение (16) $f = 6a$, $d = 3a$ и $h = 2a$, получаем $H = 4a$, Таким образом, координаты изображения 8 равны $(4a, 7a)$. Аналогично, лучи, отразившиеся от обоих зеркал и попавшие на зеркало BC, формируют изображение 9 с координатами $(7a, 4a)$. Изображения 8 и 9 действительные.

Остается только рассмотреть лучи, которые сначала попали на зеркало CD, а потом на линзу BC, и лучи, которые сначала попали на зеркало AD, а потом на линзу AB. Лучи, отразившиеся от зеркала CD и попавшие на линзу BC, формируют изображение изображения 2. На рисунке оно обозначено цифрой 10. Используя формулы (15) и (16), легко получить, что координаты изображения 10 равны $(-a, -4a)$. Аналогично, лучи, отразившиеся от зеркала AD и попавшие на линзу AB, формируют изображение 11 с координатами $(-4a, -a)$. Изображения 10 и 11 мнимые.

Ответ: изображения построены на рис. 3.

Задача 5

На Рис. 4 изображены силы, действующие на нижнюю и правую бусинки: T — сила натяжения нити, F — сила электрического отталкивания нижней и правой бусинок, F' — сила электрического отталкивания боковых бусинок, N и N' — силы реакции опоры. Из-за наличия симметрии левую бусинку рассматривать не требуется. Угол α равен 30°. Силы кулоновского взаимодействия равны

$$F = \frac{kq^2}{r^2}\,, \qquad F' = \frac{kq^2}{(2r\sin 2\alpha)^2} = \frac{kq^2}{3r^2}\,. \tag{17}$$

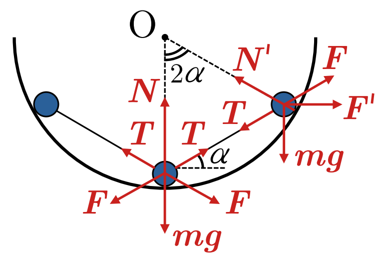

Рис. 4.

Запишем условия равновесия бусинок:

$$N + 2T\sin\alpha - 2F\sin\alpha - mg = 0\,, \tag{18}$$
$$N'\cos 2\alpha + (F - T)\sin\alpha - mg = 0\,, \tag{19}$$
$$F' + (F - T)\cos\alpha - N'\sin 2\alpha = 0\,. \tag{20}$$

Для упрощения анализа данной системы заметим, что равновесие может нарушаться по двум причинам. Во-первых, если масса бусинок слишком большая, то нити могут провиснуть, т. е. может обратиться в нуль сила T. Во-вторых, при слишком малых значениях масс нижняя бусинка может оторваться от чаши за счет действия сил со стороны нитей, что отвечает условию $N = 0$. Рассмотрим эти два предельных случая, а затем выпишем двойное неравенство на величину m.

Случай $T = 0$. Обозначим массу в данном случае за $m_{\max}$. Система уравнений (18)–(20) принимает вид

$$N - 2F\sin\alpha - m_{\max}g = 0\,, \tag{21}$$
$$N'\cos 2\alpha + F\sin\alpha - m_{\max}g = 0\,, \tag{22}$$
$$F' + F\cos\alpha - N'\sin 2\alpha = 0\,. \tag{23}$$

Данные уравнения можно рассматривать как систему на величины N, N' и $m_{\max}$. Решая систему с учетом (17), получаем

$$m_{\max} = \frac{9+\sqrt{3}}{9}\frac{kq^2}{gr^2}\,. \tag{24}$$

Заметим, что в этом случае величины N и N' получаются заведомо положительные (их явный вид нам не нужен).

Случай $N = 0$. Обозначим массу бусинок за $m_{\min}$. Система уравнений (18)–(20) переписывается в виде

$$2T\sin\alpha - 2F\sin\alpha - m_{\min}g = 0\,, \tag{25}$$

$$N'\cos 2\alpha + (F-T)\sin\alpha - m_{\min}g = 0\,, \tag{26}$$

$$F' + (F-T)\cos\alpha - N'\sin 2\alpha = 0\,. \tag{27}$$

Решая систему относительно T, N' и $m_{\min}$, находим

$$m_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{18}\frac{kq^2}{gr^2}\,. \tag{28}$$

При этом величины T и N' оказываются положительными. Легко понять, что $m_{\max} > m_{\min}$. Таким образом, масса бусинок должна удовлетворять условию

$$\frac{\sqrt{3}}{18}\frac{kq^2}{gr^2} \leqslant m \leqslant \frac{9+\sqrt{3}}{9}\frac{kq^2}{gr^2}\,. \tag{29}$$

Ответ: равновесие возможно, если масса бусинок удовлетворяет условию (29).