

# ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ

## по предмету «МАТЕМАТИКА»

для поступающих на основную образовательную программу магистратуры  
«Современная математика» по направлению подготовки 01.04.01 «МАТЕМАТИКА»

### РАЗДЕЛ I. СОДЕРЖАНИЕ ОСНОВНЫХ ТЕМ

#### **Тема 1. Алгебра.**

Кольца, подкольца, идеалы. Теорема о гомоморфизме. Кольцо многочленов, теорема Безу. Факториальность кольца многочленов над полем. Векторные пространства. Линейная зависимость. Существование базиса в векторном пространстве. Линейные отображения. Ранг линейного отображения, теорема Кронекера-Капелли. Собственные числа и характеристический многочлен. Теорема Гамильтона-Кэли. Нильпотентные операторы. Жорданова нормальная форма над комплексными числами.

#### **Тема 2. Геометрия и топология.**

Евклидовы пространства, скалярное произведение, расстояния, углы. Аффинные и ортогональные преобразования, движения. Кривые и поверхности второго порядка. Кривизна кривой на плоскости, кривизна и кручение пространственной кривой, формулы Френе. Метрические и топологические пространства, непрерывные отображения топологических пространств. Связность, линейная связность, компактность. Гомотопии отображений. Фундаментальная группа топологического пространства. Фундаментальная группа окружности.

#### **Тема 3. Математический анализ и анализ Фурье.**

Пределы. Компактность. Непрерывность. Равномерная сходимости. Дифференциал и производная. Экстремумы функций. Ряды Тейлора. Интеграл Римана. Дифференцируемые отображения. Условные экстремумы. Метод множителей Лагранжа. Интеграл Лебега. Классы  $L^p$ . Теорема Тоннели. Теорема Фубини. Свертка функций. Голоморфные функции. Теорема Коши. Теорема Лиувилля. Вычеты. Теорема Руше. Ряды Фурье. Ядра Дирихле, Фейера. Убывание коэффициентов Фурье. Теорема Планшереля.

#### **Тема 4. Обыкновенные дифференциальные уравнения и математическая физика.**

Существование и единственность решений. Линейные системы дифференциальных уравнений. Зависимость решений от начальных данных и параметров. Устойчивость по Ляпунову. Постановка основных задач математической физики. Решение дифференциальных уравнений в обобщенных функциях. Фундаментальное решение и задача Коши.

## **Тема 5. Дискретная математика.**

Графы, ориентированные графы, деревья, компоненты связности в ориентированном и неориентированном графе. Паросочетания, лемма Холла. Планарные графы, формула Эйлера. Эйлеровы пути и циклы. Перестановки, цикловый тип. Сочетания, сочетания с повторениями, размещения.

## **Тема 6. Теория вероятностей.**

Вероятностные пространства, распределения случайных величин, критерии независимости случайных величин, числовые характеристики случайных величин, испытания Бернулли, локальная и интегральная теоремы Муавра–Лапласа. Закон больших чисел и центральная предельная теорема для сумм независимых случайных величин. Характеристические функции. Марковские цепи с конечным или счётным множеством состояний. Мартингалы с дискретным временем.

## **Тема 7. Математическая логика и теория множеств.**

Язык пропозициональной классической логики и его двузначная семантика.

Дизъюнктивные нормальные формы (д.н.ф.) и конъюнктивные нормальные формы (к.н.ф.). Теорема о приведении пропозициональных формул к д.н.ф. и к.н.ф.

Гильбертовское исчисление для пропозициональной классической логики и выводимость в нём. Теорема о дедукции для этого исчисления. Непротиворечивые и максимальные непротиворечивые множества. Теорема о сильной полноте (включая корректность) гильбертовского исчисления для пропозициональной классической логики и важнейшие следствия из неё.

Парадоксы наивной теории множеств. Представление о теории множеств Цермело–Френкеля с аксиомой выбора. Базовые операции над множествами и их основные свойства. Упорядоченные пары, тройки и т.д. Декартовы произведения. Отношения и функции. Отношения эквивалентности и частичные порядки. Частично упорядоченные множества (ч.у.м.). Фундированность и трансфинитная индукция. Линейные ч.у.м. и их начальные сегменты. Вполне упорядоченные множества (в.у.м.) и трансфинитная рекурсия. Предложение об изоморфизмах в.у.м. Теорема о сравнимости в.у.м.

Равномощность и её простейшие свойства. Теорема Кантора–Шрёдера–Бернштейна.

Теорема о сравнимости мощностей. Теорема Кантора (о мощности множества всех подмножеств данного множества). Счётные множества и их основные свойства.

Мощности объединения и произведения множеств.

## Тема 8. Теоретическая информатика

Сложность алгоритмов по времени и методы её оценки. Основная теорема о времени работы рекурсивных алгоритмов (Master theorem). Алгоритмы поиска в графе (поиск в ширину, поиск в глубину, алгоритм Дейкстры). Алгоритмы сортировки (вставка, слияние, "быстрая сортировка", сортировка кучей). Структуры данных для представления множеств (список; AVL-дерево или красно-чёрное дерево; хэш-таблица), операции над ними. Конечные автоматы (детерминированные и недетерминированные), их равносильность. Сложность вычислений: класс сложности NP, примеры NP-полных задач. Алгоритмически неразрешимые задачи.

### РАЗДЕЛ II. ЛИТЕРАТУРА

- Э.Б. Винберг "Курс алгебры", 4-е издание (М.: МЦНМО, 2011), главы 1-3,5-6
- А.И. Кострикин "Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры, 3-е издание (М.: Физматлит, 2004), главы 4-5
- А.И. Кострикин "Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра, 3-е издание (М.: Физматлит, 2004), главы 1-2
- М.М.Постников. Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия. 2-е издание. М.: Наука. 1986. Главы 1-7, 12-13, 16-18, 23-26.
- А.В.Погорелов. Дифференциальная геометрия. 6-е издание. М.:Наука, 1974. Главы 1-3.
- Ю.Г.Борисович, Н.М.Близняков, Я.А.Израилевич, Т.Н.Фоменко. Введение в топологию. 2-е издание. М.: Наука, 1995. Главы 1-3.
- В. А. Зорич, "Математический анализ", – М.: МЦНМО, 2012. Часть 1, главы 6-8. Часть 2, главы 9-13 и 16-19.
- Г.М. Фихтенгольц, "Курс дифференциального и интегрального исчисления", - СПб, Лань, 2009. Том первый, главы 1-4.
- А.Ф. Филиппов. Введение в теорию дифференциальных уравнений. Изд. 2. Мир, 2007. Глава 2, § 5,7. Глава 3, § 9,10,11,14. Глава 4, § 18. Глава 5, § 23.
- В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич. Лекции по теории графов. (М., Наука, 1990), главы 1,2,4,6.
- Н. Я. Виленкин. Комбинаторика. (М., Наука, 1969), главы 1,2.
- А.Н. Ширяев, Вероятность, книги 1 и 2, (2004, МЦНМО), главы 2, 3, 7(параграфы 1-4), 8.Н.К. Верещагин и А. Шень. Языки и исчисления. 4-ое изд., исправленное. Изд-во МЦНМО, 2012. \*Разделы 1.1, 1.2, 2.1, 2.2.+
- К. Куратовский и А. Мостовский. Теория множеств. Мир, 1970. \*Параграфы 1-6 в главе I, параграфы 1-3 в главе II.+
- Н.К. Верещагин и А. Шень. Начала теории множеств. 4-ое изд., дополненное. Изд-во МЦНМО, 2012. \*Разделы 1.1, 1.3-1.7, 2.1-2.6, 2.8.]

В.С.Владимиров и В.В.Жариков. Уравнения математической физики. Физматлит. 2004. Глава 2, § 1.2, 1.4. Глава 3, § 3.1, 3.3, 3.5.

Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн, Алгоритмы. Построение и анализ, Вильямс, 2018.

Дж. Хопкрофт, Р. Мотвани, Дж. Ульман, Введение в теорию автоматов, языков и вычислений, Вильямс, 2016.

### **РАЗДЕЛ III. СТРУКТУРА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ**

Вступительное испытание по предмету «Математика» состоит из двух частей:

1. письменная часть (40% от итоговой оценки),
2. устная часть в форме собеседования с экзаменационной комиссией (60% от итоговой оценки).

Письменная часть вступительного испытания состоит из восьми заданий, соответствующих основным темам раздела I. Каждое задание оценивается следующим образом:

10 баллов ставится за полное и правильное выполнение задания,

от 0 до 9 баллов ставится в случае, если решение задачи не доведено до конца, выполнено частично, либо выполнено с ошибками.

Итоговая оценка за письменную часть является суммой баллов четырех из восьми заданий, за которые абитуриент получил наибольшее число баллов.

Максимально возможное количество баллов, которое может набрать абитуриент за письменную часть вступительного испытания, – 40 баллов. Таким образом, для получения максимального балла за эту часть вступительного испытания необходимо и достаточно полностью выполнить любые четыре задания. Продолжительность данного этапа составляет 5 часов.

Устная часть вступительного испытания предусматривает прохождение поступающими собеседования с экзаменационной комиссией. На собеседовании поступающие оцениваются по:

1. уровню математической подготовки;
2. мотивации к обучению в СПбГУ;
3. аналитическим (исследовательским) способностям.

Уровень математической подготовки поступающего характеризуется владением навыками применения основных понятий, идей и методов фундаментальных

математических дисциплин, перечисленных в разделе I (абитуриент может выбрать не менее четырех тем, по которым ему могут быть заданы вопросы); способностью строить логически последовательные цепочки рассуждений, научным кругозором, позволяющим

воспринимать и интерпретировать научные идеи различных областей математики применительно к конкретным задачам.

Оценка от 0 до 10 баллов ставится в случае, если поступающий не может ответить на большинство вопросов комиссии или ответы на вопросы даются без достаточной аргументации, демонстрирует слабое понимание основных понятий, идей и методов дисциплин, перечисленных в разделе I, имеет проблемы в построении логически последовательных цепочек рассуждений.

Оценка от 11 до 19 баллов ставится в случае, если поступающий в целом демонстрирует понимание основных понятий, идей и методов дисциплин, перечисленных в разделе I, владеет умением проводить логически последовательные цепочки рассуждений, но может затрудняться охарактеризовать и/или аргументировать свою позицию по некоторым вопросам комиссии.

Максимальная оценка – 20 баллов – ставится, если поступающий полностью понимает основные понятия, идеи и методы математических дисциплин, перечисленных в разделе I, дает исчерпывающие и последовательные ответы на вопросы комиссии.

Мотивация к обучению в СПбГУ предполагает, что поступающий имеет четкое представление о своих целях обучения на программе магистратуры; может

аргументировано объяснить возможности дальнейшего применения знаний, полученных в ходе обучения на программе магистратуры, в сфере профессиональной деятельности, на последующих этапах образования.

Оценка от 0 до 10 баллов ставится в случае, если поступающий не может ответить на большинство вопросов комиссии или ответы на вопросы даются без достаточной аргументации, демонстрирует относительно мотивированный выбор учебного заведения и программы обучения.

Оценка от 11 до 19 баллов ставится в случае, если поступающий в целом демонстрирует мотивированное поведение, но может затрудняться охарактеризовать и/или аргументировать свою позицию по некоторым вопросам комиссии относительно мотивации.

Максимальная оценка – 20 баллов – ставится, если поступающий полностью понимает свою траекторию обучения, может объяснить выбор программы в аргументированной форме, приводит примеры, дает исчерпывающие и последовательные ответы на вопросы комиссии.

Аналитические (исследовательские) способности предполагают способность видеть необходимые области исследования, умение анализировать информацию и делать выводы, развивать собственный интерес к исследованиям и анализу, применять результаты собственных исследований в профессиональной деятельности. Оценивание производится на основе ответов поступающего на вопросы членов экзаменационной комиссии, касающихся выполнявшейся ранее научно-исследовательской работы абитуриента.

Оценка от 0 до 10 баллов ставится в случае, если поступающий не может ответить на большинство вопросов комиссии или ответы на вопросы даются без достаточной аргументации, демонстрирует слабое понимание математического содержания проведенного исследования, его актуальности и научной новизны, теоретического и

практического значения полученных результатов, а также, если уровень научно-исследовательской работы низок.

Оценка от 11 до 19 баллов ставится в случае, если поступающий в целом демонстрирует понимание математического содержания проведенного исследования, его актуальности и научной новизны, теоретического и практического значения полученных результатов, но может затрудниться охарактеризовать и/или аргументировать свою позицию по некоторым вопросам комиссии относительно его научно-исследовательской работы.

Максимальная оценка – 20 баллов – ставится, если поступающий полностью раскрыл математическое содержание проведенного исследования, его актуальность и научную новизну, а также теоретическое и практическое значение полученных им результатов.

При оценивании устной части вступительного испытания могут приниматься во внимание достигнутые результаты в академической, исследовательской и профессиональной деятельности, а также опыт участия поступающего в проектах различного типа, олимпиадах, конкурсах. Однако сам факт участия в указанных мероприятиях и деятельности не может являться достаточным основанием для выставления абитуриенту высокого балла по соответствующей характеристике.

Максимально возможное количество баллов, которое может набрать абитуриент за устную часть вступительного испытания, – 60 баллов. Максимальная продолжительность данного этапа составляет 45 минут.