

**ПРОГРАММА**  
**ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ**  
для поступающих на 1-й курс  
на основные образовательные программы бакалавриата и программы подготовки  
специалистов  
по результатам вступительных испытаний, проводимых СПбГУ самостоятельно

**Раздел I. Основные вопросы и темы.**

1. Линейная функция.
  - 1.1. Уравнение прямой.
2. Модуль числа.
  - 2.1. Геометрический смысл модуля.
  - 2.2. Кусочно-линейные функции (модуль, целая часть, дробная часть).
3. Дробно-линейные функции.
  - 3.1. График дробно-линейной функции.
4. Квадратное уравнение.
  - 4.1. Теорема Виета.
  - 4.2. Квадратичная функция.
5. Элементарные методы доказательства неравенств.
6. Решение специальных видов уравнений третьей и четвертой степени.
7. Рациональные уравнения, неравенства и системы уравнений и неравенств.
  - 7.1. Рациональные уравнения и неравенства с параметрами.
8. Иррациональные уравнения и неравенства.
  - 8.1. Системы иррациональных уравнений.
  - 8.2. Иррациональные уравнения и неравенства с параметрами.
9. Логарифмические и показательные функции.
10. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства.
  - 10.1. Системы уравнений.
  - 10.2. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства с параметрами.
11. Тригонометрические функции.
  - 11.1. Тригонометрические преобразования.
12. Тригонометрические уравнения и неравенства.
  - 12.1. Системы уравнений и неравенств.
13. Производная.
  - 13.1. Уравнение касательной.
  - 13.2. Наибольшее и наименьшее значения функций.
  - 13.3. Число корней уравнения.
  - 13.4. Доказательство неравенств.
14. Уравнения и неравенства с двумя переменными.
  - 14.1. Решение уравнений и неравенств с параметрами.
15. Задачи на составление уравнений.
16. Вычислительные задачи по планиметрии.
  - 16.1. Задачи на доказательство.
  - 16.2. Применение векторов к решению геометрических задач.
17. Решение стереометрических задач.
18. Целые числа.
  - 18.1. Делимость целых чисел. Алгоритм Евклида.
  - 18.2. Наименьшее общее кратное, наибольший общий делитель.
  - 18.3. Взаимно простые числа. Арифметика остатков. Решение уравнений вида  $ax + by = 1$ .
19. Многочлены.

19.1. Деление с остатком. Теорема Безу. Схема Горнера. Рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами.

19.2. Основная теорема алгебры (формулировка). Разложение на множители.

### Раздел II. Организационно-методический.

Испытания проводятся в формате, соответствующем ЕГЭ. Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. В части 1 нужно указать только ответы и внести их в бланк. В заданиях части 2 необходимо привести развернутое решение. На выполнение экзаменационной работы по математике отводится **3 часа 55 минут (235 минут)**. Вариант оценивается из расчета 100 баллов за все полностью решенные задания.

### ОБРАЗЕЦ ВАРИАНТА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ

*Ответом на задания 1–12 является положительное или отрицательное число, не обязательно целое. Его следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера задания. Десятичные дроби при записи ответа следует округлять до трех знаков после запятой. Единицы измерений писать не нужно.*

1. Братья Игорь и Олег собрали картофель с поля своей матери. Они продали 0,96 собранного урожая, оставшийся картофель они разделили между собой на 2 равные части. Каждый получил по 150 кг картофеля. Сколько килограмм картофеля они продали?
2. Прямая линия, заданная уравнением  $y = kx + b$ , проходит через точки (1;7) и (5;8) на координатной плоскости. Найдите  $k$ .
3. Периметр правильного треугольника равен  $15\sqrt{3}$ . Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.
4. В каждой из двух картонных коробок находятся карточки с написанными на них различными числами от 1 до 5 включительно (по 5 карточек в каждой коробке). Учащийся не глядя вытаскивает две карточки: одну карточку из первой коробки и одну из второй. Какова вероятность того, что он станет обладателем хотя бы одной карточки с написанной на ней цифрой 5?
5. Решите уравнение  $2^{3x+12} = 32^{3(x+2)}$
6. В параллелограмме со сторонами 8 и 5 и углом  $120^\circ$  между ними проведена биссектриса указанного угла, пересекающая одну из оставшихся его сторон, и разбивающая ее на два отрезка. Найдите длину наименьшего из этих двух отрезков.
7. Производная  $f'(x)$  функции  $f(x)$  вычисляется по формуле:  $f'(x) = 5x - x^2$ . Найти точку минимума функции  $f(x)$ .
8. Объем параллелепипеда ABCDA'B'C'D' равен 7,2. Найти объем треугольной пирамиды A'DC'B.
9. Найдите  $\frac{70}{4^{\log_4 5}}$ .
10. В процессе распада некоторого радиоактивного вещества, масса вещества изменяется по формуле  $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ , где  $m_0$  (мг) – начальная масса вещества,  $t$  (мин) – время, прошедшее от начала распада,  $T$  (мин) – период полураспада. Через сколько минут масса вещества будет равна 1 мг, если период его полураспада  $T = 2$  мин, начальная масса  $m_0 = 4$  мг?
11. Трасса автомобильного ралли имеет форму круга. Длина одного круга трассы равна 25 км. Два автомобиля стартовали одновременно и двигались с постоянными скоростями. Через 25 минут

автомобиль, двигавшийся со скоростью 95 км/ч, отставал от второго автомобиля ровно на один круг .  
Найти скорость второго автомобиля.

12. Найдите наибольшее значение  $y_0$  функции  $y = 6\ln x - 2x^3 - 3$

*Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2 или выданные Вам листы белой бумаги. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.*

13. Решите уравнение:  $\sqrt{\sin x} (\cos x - \cos 2x) = 0$

14. В прямом круговом конусе с вершиной S точки A и B лежат на окружности основания с центром O, причем AS перпендикулярно SB, и угол AOB равен 135 градусов. Определите объем конуса, если его высота равна числу  $\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$ .

15. Решите неравенство:  $\frac{\log_{0,5}(5x-1)}{\log_{0,5}(x)} > 1$

16. В некоторый угол вписана окружность радиуса 5. Длина хорды EF, соединяющей точки касания равна 8. К окружности проведены две касательные, параллельные хорде EF и пересекающие исходный угол – первая в точках A и B, вторая – в точках C и D. Найти периметр трапеции ABCD.

17. Трое рабочих вместе красят стену. Первый и второй рабочий вместе выкрасили бы ее на 36 минут быстрее, чем один третий. Первый и третий вместе выкрасили бы ее за то же время, за которое второй выкрасил бы половину стены. Второй и третий вместе выкрасили бы ее за то же время, за которое первый выкрасил бы  $\frac{2}{7}$  этой стены. За какое время эти трое рабочих вместе выкрасят стену?

18. Пусть  $f(x) = |a - 2| \cdot x^2 + 4 \cdot x + a - 5$

а) При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $f(x) = 0$  имеет единственное решение?

б) При каких значениях параметра  $a$  неравенство  $f(x) \leq |a - 2| \cdot x^2 - 4 \cdot |x| - 3$  справедливо при всех  $x \in [-1; 1]$ ?

19. а) Пусть  $a, b, c$  – целые числа, лежащие в промежутке  $[10, 90]$ . Найдите все возможные значения  $a, b, c$ , такие, что  $\frac{2a+c}{b+3c} = \frac{17}{35}$ , или докажите, что таких не существует.

б) Укажите наибольшее возможное натуральное число  $c$ , делящееся на 5, такое что при некоторых, не обязательно целых значениях  $a, b \in [10; 90]$ , справедливо равенство  $\frac{2a+c}{b+3c} = \frac{17}{35}$ .