Программа вступительного испытания по предмету
«Математика»
для поступающих на образовательную программу магистратуры
«Современная математика»
направления 01.04.01 «Математика»

Форма проведения вступительного испытания – письменный экзамен.

1.1 Критерии оценивания и начисляемые баллы

Письменный экзамен состоит из восьми заданий, соответствующих основным темам раздела 1.2. Каждое задание оценивается следующим образом:

- 25 баллов ставится за полное и правильное выполнение задания,
- от 0 до 24 баллов ставится в случае, если решение задачи не доведено до конца, выполнено частично, либо выполнено с ошибками.

Итоговая оценка за экзамен является суммой баллов четырех из восьми заданий, за которые абитуриент получил наибольшее число баллов.
Максимально возможное количество баллов, которое может набрать абитуриент за вступительное испытание, – 100 баллов. Таким образом, для получения максимального балла за эту часть вступительного испытания необходимо и достаточно полностью выполнить любые четыре задания. Продолжительность данного этапа составляет 5 часов.

1.2 Основные темы для проверки уровня математической подготовки

Тема 1. Алгебра.
Кольца, подкольца, идеалы. Теорема о гомоморфизме. Кольцо многочленов, теорема Безу. Факториальность кольца многочленов над полем. Векторные пространства. Линейная зависимость. Существование базиса в векторном пространстве. Линейные отображения. Ранг линейного отображения, теорема Кронекера-Капелли. Собственные числа и характеристический многочлен. Теорема Гамильтона-Кэли. Нильпотентные операторы. Жорданова нормальная форма над комплексными числами.

Тема 2. Геометрия и топология.
Евклидовы пространства, скалярное произведение, расстояния, углы. Аффинные и ортогональные преобразования, движения. Кривые и поверхности второго порядка. Кривизна кривой на плоскости, кривизна и кручение пространственной кривой, формулы Френе. Метрические и топологические пространства, непрерывные отображения топологических пространств. Связность, линейная связность, компактность. Гомотопии отображений. Фундаментальная группа топологического пространства. Фундаментальная группа окружности.

Тема 3. Математический анализ и анализ Фурье.
Пределы. Компактность. Непрерывность. Равномерная сходимость. Дифференциал и производная. Экстремумы функций. Ряды Тейлора. Интеграл Римана.
Дифференцируемые отображения. Условные экстремумы. Метод множителей Лагранжа. Интеграл Лебега. Классы L^p. Теорема Тоннели. Теорема Фубини. Свертка функций. Голоморфные функции. Теорема Коши. Теорема Лиувилля. Вычеты. Теорема Руше. Ряды Фурье. Ядра Дирихле, Фейера. Убывание коэффициентов Фурье. Теорема Планшереля.

Тема 4. Обыкновенные дифференциальные уравнения и математическая физика.
Существование и единственность решений. Линейные системы дифференциальных уравнений. Зависимость решений от начальных данных и параметров. Устойчивость по Ляпунову. Постановка основных задач математической физики. Решение дифференциальных уравнений в обобщенных функциях. Фундаментальное решение и задача Коши.

Тема 5. Дискретная математика.
Графы, ориентированные графы, деревья, компоненты связности в ориентированном и неориентированном графе. Паросочетания, лемма Холла. Планарные графы, формула Эйлера. Эйлеровы пути и циклы. Перестановки, цикловый тип. Сочетания, сочетания с повторениями, размещения.

Тема 6. Теория вероятностей.
Вероятностные пространства, распределения случайных величин, критерии независимости случайных величин, числовые характеристики случайных величин, испытания Бернулли, локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа. Закон больших чисел и центральная предельная теорема для сумм независимых случайных величин. Характеристические функции. Марковские цепи с конечным или счётным множеством состояний. Мартингалы с дискретным временем.

Тема 7. Математическая логика и теория множеств.
Язык пропозициональной классической логики и его двузначная семантика.
Дизъюнктивные нормальные формы (д.н.ф.) и конъюнктивные нормальные формы (к.н.ф.). Теорема о приведении пропозициональных формул к д.н.ф. и к.н.ф.
Гильбертовское исчисление для пропозициональной классической логики и выводимость в нём. Теорема о дедукции для этого исчисления. Непротиворечивые и максимальные непротиворечивые множества. Теорема о сильной полноте (включая корректность) гильбертовского исчисления для пропозициональной классической логики и важнейшие следствия из неё.
Парадоксы наивной теории множеств. Представление о теории множеств Цермело–Френкеля с аксиомой выбора. Базовые операции над множествами и их основные свойства. Упорядоченные пары, тройки и т.д. Декартовы произведения. Отношения и функции. Отношения эквивалентности и частичные порядки. Частично упорядоченные множества (ч.у.м.). Фундированность и трансфинитная индукция. Линейные ч.у.м. и их начальные сегменты. Вполне упорядоченные множества (в.у.м.) и трансфинитная рекурсия. Предложение об изоморфизмах в.у.м. Теорема о сравнимости в.у.м. Равномощность и её простейшие свойства. Теорема Кантора–Шрёдера–Бернштейна.
Теорема о сравнимости мощностей. Теорема Кантора (о мощности множества всех подмножеств данного множества). Счётные множества и их основные свойства. Мощности объединения и произведения множеств.

Тема 8. Теоретическая информатика
Сложность алгоритмов по времени и методы её оценки. Основная теорема о времени работы рекурсивных алгоритмов (Master theorem). Алгоритмы поиска в графе (поиск в ширину, поиск в глубину, алгоритм Дейкстры). Алгоритмы сортировки (вставка, слияние, "быстрая сортировка", сортировка кучей). Структуры данных для представления множеств (список; АВЛ-дерево или красно-чёрное дерево; хэш-таблица), операции над ними. Конечные автоматы (детерминированные и

недетерминированные), их равносильность. Сложность вычислений: класс сложности NP, примеры NP-полных задач. Алгоритмически неразрешимые задачи.

1.2.1 ЛИТЕРАТУРА

Э.Б. Винберг "Курс алгебры", 4-е издание (М.: МЦНМО, 2011), главы 1-3,5-6

А.И. Кострикин "Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры, 3-е издание (М.: Физматлит, 2004), главы 4-5

А.И. Кострикин "Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра, 3-е издание (М.: Физматлит, 2004), главы 1-2

М.М. Постников. Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия. 2-е издание. М.: Наука. 1986. Главы 1-7, 12-13, 16-18, 23-26.

А.В. Погорелов. Дифференциальная геометрия. 6-е издание. М.: Наука, 1974. Главы 1-3.

Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко. Введение в топологию. 2-е издание. М.: Наука, 1995. Главы 1-3.

В. А. Зорич, “Математический анализ”, – М.: МЦНМО, 2012. Часть 1, главы 6-8. Часть 2, главы 9-13 и 16-19.

Г.М. Фихтенгольц, “Курс дифференциального и интегрального исчисления”, - СПб, Лань, 2009. Том первый, главы 1-4.

А.Ф. Филиппов. Введение в теорию дифференциальных уравнений. Изд. 2. Мир, 2007. Глава 2, § 5,7. Глава 3, § 9,10,11,14. Глава 4, § 18. Глава 5, § 23.

В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич. Лекции по теории графов. (М., Наука, 1990), главы 1,2,4,6.

Н. Я. Виленкин. Комбинаторика. (М., Наука, 1969), главы 1,2.

А.Н. Ширяев, Вероятность, книги 1 и 2, (2004, МЦНМО), главы 2, 3, 7(параграфы 1-4), 8.

Н.К. Верещагин и А. Шень. Языки и исчисления. 4-ое изд., исправленное. Изд-во МЦНМО, 2012. *Разделы 1.1, 1.2, 2.1, 2.2.+

К. Куратовский и А. Мостовский. Теория множеств. Мир, 1970. *Параграфы 1-6 в главе I, параграфы 1-3 в главе II.+

Н.К. Верещагин и А. Шень. Начала теории множеств. 4-ое изд., дополненное. Изд-во МЦНМО, 2012. *Разделы 1.1, 1.3-1.7, 2.1-2.6, 2.8.]

В.С. Владимиров и В.В. Жариков. Уравнения математической физики. Физматлит. 2004. Глава 2, § 1.2, 1.4. Глава 3, § 3.1, 3.3, 3.5.

Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн, Алгоритмы. Построение и анализ, Вильямс, 2018.

Дж. Хопкрофт, Р. Мотвани, Дж. Ульман, Введение в теорию автоматов, языков и вычислений, Вильямс, 2016.