

Программа вступительного испытания по предмету
«Математика»
для поступающих на образовательную программу магистратуры
«Современная математика (с дополнительной квалификацией «Специалист по научно-исследовательским разработкам»)»
направления подготовки 01.04.01 «Математика»

Форма проведения вступительного испытания – письменный экзамен.

I. Структура вступительного испытания. Критерии оценивания и начисляемые баллы

Письменная экзамен состоит из восьми заданий, соответствующих основным темам раздела II. Каждое задание оценивается следующим образом:

- 25 баллов ставится за полное и правильное выполнение задания,
- от 0 до 24 баллов ставится в случае, если решение задачи не доведено до конца, выполнено частично, либо выполнено с ошибками:
 - ✓ 15-24 балла - задача в целом решена, но в решении имеются устранимые пробелы;
 - ✓ 8-14 баллов - в решении имеются ценные продвижения, но чтобы его завершить, требуются дополнительные идеи;
 - ✓ 1-7 баллов - получены небольшие продвижения.

Итоговая оценка за экзамен является суммой баллов четырех из восьми заданий, за которые абитуриент получил наибольшее число баллов.

Максимально возможное количество баллов, которое может набрать абитуриент за вступительное испытание, – 100 баллов. Таким образом, для получения максимального балла за эту часть вступительного испытания необходимо и достаточно полностью выполнить любые четыре задания.

Продолжительность вступительного испытания составляет **5 часов**.

II. Основные темы для проверки уровня математической подготовки

Тема 1. Алгебра.

Кольца, подкольца, идеалы. Теорема о гомоморфизме. Кольцо многочленов, теорема Безу. Факториальность кольца многочленов над полем. Векторные пространства. Линейная зависимость. Существование базиса в векторном пространстве. Линейные отображения. Ранг линейного отображения, теорема Кронекера-Капелли. Собственные числа и характеристический многочлен. Теорема Гамильтона-Кэли. Нильпотентные операторы. Жорданова нормальная форма над комплексными числами.

Тема 2. Геометрия и топология.

Евклидовы пространства, скалярное произведение, расстояния, углы. Аффинные и ортогональные преобразования, движения. Кривые и поверхности второго порядка. Кривизна кривой на плоскости, кривизна и кручение пространственной кривой, формулы Френе. Метрические и топологические пространства, непрерывные отображения топологических пространств. Связность, линейная связность, компактность. Гомотопии отображений. Фундаментальная группа топологического пространства. Фундаментальная группа окружности.

Тема 3. Математический анализ и анализ Фурье.

Пределы. Компактность. Непрерывность. Равномерная сходимости. Дифференциал и производная. Экстремумы функций. Ряды Тейлора. Интеграл Римана. Дифференцируемые отображения. Условные экстремумы. Метод множителей Лагранжа. Интеграл Лебега. Классы L^p . Теорема Тоннели. Теорема Фубини. Свертка функций. Голоморфные функции. Теорема Коши. Теорема Лиувилля. Вычеты. Теорема Руше. Ряды Фурье. Ядра Дирихле, Фейера. Убывание коэффициентов Фурье. Теорема Планшереля.

Тема 4. Обыкновенные дифференциальные уравнения и математическая физика.

Существование и единственность решений. Линейные системы дифференциальных уравнений. Зависимость решений от начальных данных и параметров. Устойчивость по Ляпунову. Постановка основных задач математической физики. Решение дифференциальных уравнений в обобщенных функциях. Фундаментальное решение и задача Коши.

Тема 5. Дискретная математика.

Графы, ориентированные графы, деревья, компоненты связности в ориентированном и неориентированном графе. Паросочетания, лемма Холла. Планарные графы, формула Эйлера. Эйлеровы пути и циклы. Перестановки, цикловый тип. Сочетания, сочетания с повторениями, размещения.

Тема 6. Теория вероятностей.

Вероятностные пространства, распределения случайных величин, критерии независимости случайных величин, числовые характеристики случайных величин, испытания Бернулли, локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа. Закон больших чисел и центральная предельная теорема для сумм независимых случайных величин. Характеристические функции. Марковские цепи с конечным или счётным множеством состояний. Мартингалы с дискретным временем.

Тема 7. Математическая логика и теория множеств.

Язык пропозициональной классической логики и его двузначная семантика. Дизъюнктивные нормальные формы (д.н.ф.) и конъюнктивные нормальные формы (к.н.ф.). Теорема о приведении пропозициональных формул к д.н.ф. и к.н.ф. Гильбертовское исчисление для пропозициональной классической логики и выводимость в нём. Теорема о дедукции для этого исчисления. Непротиворечивые и максимальные непротиворечивые множества. Теорема о сильной полноте (включая корректность) гильбертовского исчисления для пропозициональной классической логики и важнейшие следствия из неё. Парадоксы наивной теории множеств. Представление о теории множеств Цермело-Френкеля с аксиомой выбора. Базовые операции над множествами и их основные свойства. Упорядоченные пары, тройки и т.д. Декартовы произведения. Отношения и функции. Отношения эквивалентности и частичные порядки. Частично упорядоченные множества (ч.у.м.). Фундированность и трансфинитная индукция. Линейные ч.у.м. и их начальные сегменты. Вполне упорядоченные множества (в.у.м.) и трансфинитная рекурсия. Предложение об изоморфизмах в.у.м. Теорема о сравнимости в.у.м. Равномощность и её простейшие свойства. Теорема Кантора-Шрёдера-Бернштейна. Теорема о сравнимости мощностей. Теорема Кантора (о мощности множества всех подмножеств данного множества). Счётные множества и их основные свойства. Мощности объединения и произведения множеств.

Тема 8. Теоретическая информатика

Сложность алгоритмов по времени и методы её оценки. Основная теорема о времени работы рекурсивных алгоритмов (Master theorem). Алгоритмы поиска в графе (поиск в ширину, поиск в глубину, алгоритм Дейкстры). Алгоритмы сортировки (вставка, слияние, "быстрая сортировка", сортировка кучей). Структуры данных для представления множеств (список; AVL-дерево или красно-чёрное дерево; хэш-таблица), операции над ними. Конечные автоматы (детерминированные и недетерминированные), их равносильность. Сложность вычислений: класс сложности NP, примеры NP-полных задач. Алгоритмически неразрешимые задачи.

III. ЛИТЕРАТУРА

Э.Б. Винберг "Курс алгебры", 4-е издание (М.: МЦНМО, 2011), главы 1-3,5-6

А.И. Кострикин "Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры, 3-е издание (М.: Физматлит, 2004), главы 4-5

А.И. Кострикин "Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра, 3-е издание (М.: Физматлит, 2004), главы 1-2

М.М. Постников. Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия. 2-е издание. М.: Наука. 1986. Главы 1-7, 12-13, 16-18, 23-26.

А.В. Погорелов. Дифференциальная геометрия. 6-е издание. М.: Наука, 1974. Главы 1-3.

Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко. Введение в топологию. 2-е издание. М.: Наука, 1995. Главы 1-3.

В. А. Зорич, "Математический анализ", – М.: МЦНМО, 2012. Часть 1, главы 6-8. Часть 2, главы 9-13 и 16-19.

Г.М. Фихтенгольц, "Курс дифференциального и интегрального исчисления", - СПб, Лань, 2009. Том первый, главы 1-4.

А.Ф. Филиппов. Введение в теорию дифференциальных уравнений. Изд. 2. Мир, 2007. Глава 2, § 5,7. Глава 3, § 9,10,11,14. Глава 4, § 18. Глава 5, § 23.

В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич. Лекции по теории графов. (М., Наука, 1990), главы 1,2,4,6.

Н. Я. Виленкин. Комбинаторика. (М., Наука, 1969), главы 1,2.

А.Н. Ширяев, Вероятность, книги 1 и 2, (2004, МЦНМО), главы 2, 3, 7(параграфы 1-4), 8.

Н.К. Верещагин и А. Шень. Языки и исчисления. 4-ое изд., исправленное. Изд-во МЦНМО, 2012. *Разделы 1.1, 1.2, 2.1, 2.2.+

К. Куратовский и А. Мостовский. Теория множеств. Мир, 1970. *Параграфы 1-6 в главе I, параграфы 1-3 в главе II.+

Н.К. Верещагин и А. Шень. Начала теории множеств. 4-ое изд., дополненное. Изд-во МЦНМО, 2012. *Разделы 1.1, 1.3-1.7, 2.1-2.6, 2.8.]

В.С. Владимиров и В.В. Жариков. Уравнения математической физики. Физматлит. 2004. Глава 2, § 1.2, 1.4. Глава 3, § 3.1, 3.3, 3.5.

Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн, Алгоритмы. Построение и анализ, Вильямс, 2018.

Дж. Хопкрофт, Р. Мотвани, Дж. Ульман, Введение в теорию автоматов, языков и вычислений, Вильямс, 2016.